

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Факультет компьютерных систем и информационных технологий

Кафедра прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета компьютерных систем
и информационных технологий



_____ Кочевский А. А.

« 19 » апреля 2023 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине

«Математический анализ»

09.03.04 Программная инженерия

«Разработка программно-информационных систем»

Разработчики:

доцент _____ Темникова С.В.,

доцент _____ Чалая Е. Ю.

ФОС рассмотрен и одобрен на заседании кафедры прикладной математики
от 18 апреля 2023 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой _____ Малый В. В.

Луганск 2023 г.

**Паспорт
фонда оценочных средств по учебной дисциплине
«Математический анализ»**

**Перечень компетенций (элементов компетенций),
формируемых в результате освоения учебной дисциплины**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Формулировка контролируемой компетенции	Контролируемые темы учебной дисциплины, практики	Этапы формирования (семестр изучения)
1	УК-1	способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;	Тема 1. Множество действительных чисел	начальный (1)
			Тема 2. Функции одной переменной	начальный (1)
			Тема 3. Пределы	начальный (1)
			Тема 4. Непрерывность функции	начальный (1)
			Тема 5. Непрерывные функции на отрезке	начальный (1)
			Тема 6. Производная функции одной переменной	начальный (1)
			Тема 7. Дифференциал функции одной переменной	начальный (1)
			Тема 8. Основные свойства дифференцируемых функций и их применение	начальный (1)
			Тема 9. Неопределенный интеграл	начальный (2)
			Тема 10. Определенный интеграл	начальный (2)
			Тема 11. Применение определенного интеграла	начальный (2)
			Тема 12.	начальный (2)

			Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования	
			Тема 13. Числовые ряды	начальный (2)
			Тема 14. Функциональные последовательности и функциональные ряды	начальный (2)
			Тема 15. Степенные ряды. Разложение функций в степенные ряды	начальный (2)
			Тема 16. Тригонометрические ряды. Ряд Фурье	начальный (2)
			Тема 17. Функции нескольких переменных	(3)
			Тема 18. Вычисление частных производных высших порядков функции нескольких переменных. Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных	(3)
			Тема 19. Экстремумы функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных	(3)
			Тема 20. Двойные интегралы	(3)
			Тема 21. Тройные интегралы	(3)
			Тема 22. Применение кратных интегралов	(3)
			Тема 23. Криволинейные интегралы	(3)
			Тема 24.	(3)

			Поверхностные интегралы	
			Тема 25. Дифференциальные уравнения	(3)
			Тема 26. Теория поля	(3)
2	ОПК-1	способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.	Тема 1. Множество действительных чисел	начальный (1)
			Тема 2. Функции одной переменной	начальный (1)
			Тема 3. Пределы	начальный (1)
			Тема 4. Непрерывность функции	начальный (1)
			Тема 5. Непрерывные функции на отрезке	начальный (1)
			Тема 6. Производная функции одной переменной	начальный (1)
			Тема 7. Дифференциал функции одной переменной	начальный (1)
			Тема 8. Основные свойства дифференцируемых функций и их применение	начальный (1)
			Тема 9. Неопределенный интеграл	начальный (2)
			Тема 10. Определенный интеграл	начальный (2)
			Тема 11. Применение определенного интеграла	начальный (2)
			Тема 12. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования	начальный (2)
			Тема 13.	начальный (2)

			Числовые ряды	
			Тема 14. Функциональные последовательности и функциональные ряды	начальный (2)
			Тема 15. Степенные ряды. Разложение функций в степенные ряды	начальный (2)
			Тема 16. Тригонометрические ряды. Ряд Фурье	начальный (2)
			Тема 17. Функции нескольких переменных	(3)
			Тема 18. Вычисление частных производных высших порядков функции нескольких переменных. Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных	(3)
			Тема 19. Экстремумы функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных	(3)
			Тема 20. Двойные интегралы	(3)
			Тема 21. Тройные интегралы	(3)
			Тема 22. Применение кратных интегралов	(3)
			Тема 23. Криволинейные интегралы	(3)
			Тема 24. Поверхностные интегралы	(3)
			Тема 25. Дифференциальные уравнения	(3)
			Тема 26.	(3)

			Теория поля	
--	--	--	-------------	--

**Показатели и критерии оценивания компетенций,
описание шкал оценивания**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Показатель оценивания (знания, умения, навыки)	Контролируемые темы учебной дисциплины	Наименование оценочного средства
1	УК-1	знать: основные понятия, определения, теоремы и методы математического анализа, в части теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов, теории поля. уметь: использовать методы математического анализа; решать типовые задачи; обращаться к информационным системам (Интернет, математическая литература) для пополнения и уточнения математических знаний. владеть навыками: научно-исследовательского анализа и моделирования, навыками практического использования базовых знаний и методов математического анализа в приложениях к техническим наукам.	Тема 1, Тема 2, Тема 3, Тема 4, Тема 5, Тема 6, Тема 7, Тема 8, Тема 9, Тема 10, Тема 11, Тема 12 Тема 13, Тема 14, Тема 15, Тема 16, Тема 17, Тема 18, Тема 19, Тема 20, Тема 21, Тема 22, Тема 23, Тема 24, Тема 25, Тема 26.	Фронтальные и индивидуальные опросы; контрольные работы; индивидуальные задания, промежуточная аттестация (экзамен)
2	ОПК-1	знать: основные понятия, определения, теоремы и методы математического анализа, в части теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов, теории поля. уметь: использовать методы математического	Тема 1, Тема 2, Тема 3, Тема 4, Тема 5, Тема 6, Тема 7, Тема 8, Тема 9, Тема 10, Тема 11,	Фронтальные и индивидуальные опросы; контрольные работы; индивидуальные задания, промежуточная аттестация (экзамен)

		анализа; решать типовые задачи; обращаться к информационным системам (Интернет, математическая литература) для пополнения и уточнения математических знаний. владеть навыками: научно-исследовательского анализа и моделирования, навыками практического использования базовых знаний и методов математического анализа в приложениях к техническим наукам.	Тема 12 Тема 13, Тема 14, Тема 15, Тема 16, Тема 17, Тема 18, Тема 19, Тема 20, Тема 21, Тема 22, Тема 23, Тема 24, Тема 25, Тема 26.	
--	--	--	--	--

**Фонды оценочных средств по дисциплине
«Математический анализ»**

Вопросы для фронтальных и индивидуальных опросов:

Тема 1. Множество действительных чисел

1. Что принято понимать под множеством? Приведите примеры множеств.
2. Что называется подмножеством данного множества?
3. Какие множества называются равными?
4. Понятия конечного и бесконечного множеств.
5. Что означает взаимно однозначное соответствие между двумя множествами?
6. Совпадают ли множества a, b, c, d, e и a, c, e, d, b ?
7. Укажите, какие из нижеперечисленных множеств будут конечными, и какие – бесконечными:
 - а) множество студентов данного института;
 - б) множество целых отрицательных чисел;
 - в) множество корней данного многочлена;
 - г) множество всех прямых, которые проходят через заданную точку.
8. Образуйте все возможные подмножества данного множества a, b, c, d, e .
9. Почему про пустое множество можно сказать, что оно включается в любое наперед данное множество?
10. Даны два множества: A – множество, состоящее из 15 стульев, и B – множество, состоящее из 15 студентов. Можно ли сказать, что $A=B$? Можно ли установить между этими множествами взаимно однозначное соответствие?
11. Какие числа называются натуральными?
12. Какие числа называются целыми? Обладает ли свойством плотности множество целых чисел?
13. Какие числа называются рациональными? Доказать, что сумма двух рациональных чисел есть число рациональное.
14. Какие числа называются иррациональными? Приведите примеры.
15. Множество действительных чисел и его основные свойства.
16. Аксиома непрерывности множества действительных чисел.
17. Что называется модулем действительного числа?
18. При каких условиях имеет место равенство $|x + y| = |x| + |y|$?
19. Напишите неравенства, связывающие модуль суммы и разности двух чисел с суммой и разностью их модулей.
20. Понятие числового множества. Примеры числовых множеств.
21. Дайте определение нижней и верхней границ числового

множества.

22. Какое числовое множество называется ограниченным снизу (сверху)? Приведите примеры.

23. Какое числовое множество называется ограниченным? Приведите примеры.

24. Сформулируйте и докажите признак ограниченности числового множества.

Тема 2. Функции одной переменной.

25. Понятие функции одной переменной.

26. Область определения и область значений функции одной переменной.

27. Дайте определение графика функции одной переменной.

28. Что значит задать функцию одной переменной? Способы задания функции одной переменной.

29. Действия над функциями.

30. Дайте определение композиции двух функций. Приведите примеры.

31. Понятие числовой последовательности.

32. Понятие монотонной функции.

33. Понятия четной и нечетной функций.

34. Сформулируйте теорему о сумме двух четных (нечетных) функций.

35. Сформулируйте теорему о произведении двух четных или двух нечетных функций; теорему о произведении четной функции на нечетную функцию.

36. Понятие периодической функции.

37. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

38. Элементарные преобразования графиков функций.

Тема 3. Пределы.

39. Сформулируйте определение δ - окрестности точки на числовой прямой. Что такое проколота δ - окрестность точки на числовой прямой.

40. Дайте определение предельной точки множества.

41. Понятие предела функции в точке и его геометрический смысл.

42. Первый замечательный предел (лемма о вспомогательных неравенствах; теорема о первом замечательном пределе).

43. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела.

44. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенствах.

45. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции.

46. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности функции,

имеющей конечный предел.

47. Пределы суммы, разности, произведения и частного двух функций.
48. Предел функции при аргументе, стремящемся к ∞ .
49. Предел числовой последовательности.
50. Бесконечно малые функции и их свойства.
51. Бесконечно большие функции и бесконечные пределы.
52. Сформулируйте и докажите теорему о связи понятия бесконечно большой функции с понятием бесконечно малой функции.
53. Вычисление предела суммы, разности, произведения и частного двух функций в особых случаях.
54. Эквивалентные бесконечно малые функции и вычисление с их помощью пределов.
55. Односторонние пределы функций. Сформулируйте и докажите теорему о связи понятий односторонних пределов с понятием обычного предела.
56. Точные границы числовых множеств. Сформулируйте и докажите теоремы о существовании точной верхней и точной нижней границ.
57. Сформулируйте теоремы и докажите о свойствах точной верхней и точной нижней границ числовых множеств.
58. Сформулируйте и докажите теоремы о пределе монотонной числовой последовательности. Теорема Вейерштрасса.
59. Сформулируйте и докажите теорему Кантора. Сформулируйте теорему о неравенстве Бернулли.
60. Число ϵ . Сформулируйте и докажите теорему о втором замечательном пределе.
61. Сформулируйте и докажите теоремы о третьем, четвертом и пятом замечательных пределах и следствия из них.

Тема 4. Непрерывность функции.

62. Сформулируйте определение непрерывной функции в точке.
63. Сформулируйте и докажите теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных в точке функций.
64. Сформулируйте и докажите теорему о внесении знака предела под знак непрерывной функции.
65. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности композиции двух функций.
66. Односторонняя непрерывность функции в точке.
67. Дайте определение точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.
68. Односторонние пределы монотонных функций.
69. Сформулируйте теорему и докажите о промежуточных значениях непрерывной функции.
70. Понятие обратной функции. Сформулируйте и докажите теорему

о существовании непрерывной обратной функции.

Тема 5. Непрерывные функции на отрезке.

71. Сформулируйте определение подпоследовательности.
72. Сформулируйте и докажите теорему Больцано-Вейерштрасса.
73. Сформулируйте и докажите теоремы Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции.

Тема 6. Производная функции одной переменной.

74. Сформулируйте определение производной функции.
75. Какая функция называется дифференцируемой в точке?
76. Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости функции в точке с её непрерывностью в этой точке.
77. Дайте определения касательной и нормали к графику функции в точке.
78. Сформулируйте и докажите теорему о геометрическом смысле дифференцируемости функции в точке.
79. Производная суммы, разности, произведения и частного двух функций.
80. Сформулируйте и докажите теорему о производной композиции двух функций.
81. Производные элементарных функций.
82. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции.
83. Гиперболические функции и их производные.
84. Параметризованный путь. Примеры. Сформулируйте и докажите теорему о касательной к параметризованному пути.
85. Параметрический способ задания функции. Сформулируйте и докажите теорему о производной параметрически заданной функции.
86. Напишите уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \operatorname{arctg} x$ в точке $x = 1$.
87. Найдите $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$, если $f(x) = |x - 1|e^x$. Существует ли $f'(1)$?
88. Найдите y'_x , если: а) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$; б) $y = \operatorname{arctg} th(x)$.
89. Что можно сказать о дифференцируемости суммы функций $f(x) + g(x)$ в точке $x = x_0$ если, в этой точке: а) функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $g(x)$ не дифференцируема? б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не дифференцируемы?
90. Используя определение, покажите, что функция $y = x^2 - 2x$ дифференцируема в точке $x = 2$ и найдите её дифференциал в этой точке.
91. Является ли непрерывность функции в данной точке достаточным

условием дифференцируемости? Ответ обосновать с помощью примера.

92. Может ли существовать $f''(x_0)$, если не существует $f'(x_0)$?

93. Найдите $f^{(n)}(x)$, если $f(x) = \ln x \cdot x$.

Тема 7. Дифференциал функции одной переменной

94. Сформулируйте определение дифференциала функции одной переменной.

95. Сформулируйте и докажите теорему о геометрическом смысле дифференциала функции одной переменной.

96. В чем состоит механический смысл дифференциала функции?

97. Сформулируйте и докажите теорему о дифференциале суммы, разности, произведения и частного двух функций.

98. Сформулируйте и докажите теорему о дифференциале композиции двух функций.

99. Что понимается под инвариантностью формы первого дифференциала?

100. Используя формулу для вычисления дифференциала, найдите dy , если $y = x \cdot \sin x + \cos x$.

101. Дифференциалы высших порядков.

102. Используя формулу для вычисления дифференциала, найдите d^2y , если $y = x \cdot \sin x$.

Тема 8. Основные свойства дифференцируемых функций и их применение.

103. Дайте определения возрастающей (убывающей) функции в точке.

104. Сформулируйте и докажите теорему о возрастании и убывании функции в точке.

105. Сформулируйте и докажите теорему Ферма.

106. Сформулируйте и докажите теорему Ролля.

107. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.

108. Сформулируйте и докажите теорему Коши.

109. Сформулируйте и докажите теорему о достаточном условии монотонности функции на промежутке.

110. Дайте определение точке максимума (минимума) функции.

111. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом условии существования экстремума функции одной переменной.

112. Сформулируйте и докажите теорему о первом и втором достаточных условиях существования экстремума функции одной переменной.

113. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба графика функции.

114. Невертикальные асимптоты графика функции.

115. Раскрытие неопределенностей типа $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ с помощью правила Лопиталя.

116. Вычислите, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{2}{x^4 + \ln x}$.

117. Схема исследования функции и построение её графика.

118. Исследуйте функцию и постройте её график:
 $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.

Тема 9. Неопределенный интеграл.

119. Дайте определение первообразной функции.

120. Сформулируйте и докажите теорему о первообразной функции.

121. Понятие неопределенного интеграла.

122. Сформулируйте и докажите основные свойства неопределенного интеграла.

123. Таблица основных неопределенных интегралов.

124. Докажите справедливость формулы для табличного интеграла $\int x^n dx; (n \neq -1)$.

125. Докажите справедливость формулы для табличного интеграла $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

126. Сформулируйте и докажите теорему об интегрировании по частям.

127. Вычислите с помощью интегрирования по частям $\int x \cdot \sin ax dx$.

128. Сформулируйте и докажите теорему о замене переменной в неопределенном интеграле.

129. Понятия рациональной функции, простейших рациональных функций. Интегрирование простейших дробей первого и второго типа.

130. Интегрирование простейших дробей третьего типа.

131. Интегрирование простейших дробей четвертого типа.

132. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}; \left(q - \frac{p^2}{4} > 0\right)$, сведя его к табличному.

133. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}; \left(q - \frac{p^2}{4} < 0\right)$, сведя его к табличному.

134. Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}$, сведя его к табличному.

135. Интегрирование правильной рациональной функции.

136. Интегрирование неправильной рациональной функции.

137. Интегрирование тригонометрических выражений.

138. Интегрирование выражений, содержащих радикалы.

139. Какую подстановку нужно выполнить для рационализации интеграла $\int R(\sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{x}) dx$?

140. Укажите рационализирующую подстановку для интеграла $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$.

Тема 10. Равномерная непрерывность функции на промежутке.

141. Сформулируйте определение равномерной непрерывности функции на промежутке.

142. Сформулируйте и докажите теорему Кантора о равномерной непрерывности.

143. Понятие колебания функции на отрезке. Следствие из теоремы Кантора.

144. Следует ли из равномерной непрерывности функции на промежутке обычная непрерывность на этом промежутке?

145. Докажите равномерную непрерывность функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[0, 1]$, не используя теорему Кантора.

146. Будет ли функция $f(x) = x^2 - 3x$ равномерно непрерывной на интервале $(1, 3)$?

Тема 11. Определенный интеграл.

147. Разбиение отрезка. Ранг разбиения. Интегральная сумма. Понятие определенного интеграла.

148. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

149. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом условии интегрируемости функции.

150. Суммы Дарбу и их свойства.

151. Критерий интегрируемости функции.

152. Достаточные условия интегрируемости функции.

153. Сформулируйте и докажите основные свойства определенного интеграла.

154. Сформулируйте и докажите теорему о среднем значении.

155. Сформулируйте и докажите теорему о производной определенного интеграла по верхнему пределу интегрирования.

156. Сформулируйте и докажите теорему о существовании первообразной.

157. Сформулируйте и докажите теорему о формуле Ньютона – Лейбница.

158. Сформулируйте и докажите теорему об интегрировании по частям в определенном интеграле.

159. Сформулируйте и докажите теорему о замене переменной интегрирования.

160. Интегралы четных и нечетных функций по отрезку с серединой в

нуле.

161. Понятие о приближенном вычислении определенных интегралов. Методы вычисления определенных интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Тема 12. Применение определенного интеграла.

162. Квадрируемые фигуры на плоскости и их площади. Признак квадрируемости.

163. Сформулируйте и докажите теорему о площади криволинейной трапеции. Следствия.

164. Сформулируйте и докажите теорему о площади криволинейного сектора.

165. Функции с ограниченным изменением.

166. Спряmlяемость и длина плоской кривой. Сформулируйте и докажите теорему Жордана.

167. Вычисление длины гладкой кривой (определение гладкой кривой, теорема о длине гладкой кривой).

168. Вычисление длины гладкой кривой, заданной в декартовых координатах, и кривой, заданной в полярных координатах.

Тема 13. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

169. Сформулируйте определение несобственного интеграла 1-го рода с бесконечным верхним пределом от непрерывной функции.

170. Сформулируйте определение несобственного интеграла 1-го рода с бесконечным нижним пределом от непрерывной функции.

171. Какой несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся?

172. Укажите, для каких значений параметра σ интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\sigma}$, ($a > 0$) является сходящимся, а для каких значений – расходящимся интегралом.

173. Сформулируйте определение остатка несобственного интеграла.

174. Сформулируйте и докажите теорему об остатке несобственного интеграла.

Тема 14. Числовые ряды.

175. Понятие числового ряда. Сходящийся числовой ряд и его сумма. Теорема о геометрическом ряде.

176. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (5/8)^n$.

177. Теорема о сложении сходящихся числовых рядов. Теорема об умножении сходящегося числового ряда на число.

178. Определение остатка числового ряда. Теоремы об остатке

сходящегося числового ряда.

179. Необходимое условие сходимости числового ряда. Гармонический ряд.

180. Сформулируйте необходимое условие сходимости числового ряда и с его помощью покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)^n$ расходится.

181. Используя простейшие свойства числовых рядов, найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} \right)$.

182. Даны ряды с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2), $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$. С помощью признаков сходимости положительных рядов установите, какое из нижеследующих утверждений справедливо: а) ряд (2) сходится, если $b_n = na_n$; в) ряд (2) расходится, если $b_n > a_n$, $n \geq 10$; с) ряд (2) расходится, если $b_n = 3^n a_n$; d) ряд (2) сходится, если $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

183. Какие из перечисленных ниже рядов условно сходятся: А) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n \ln n}$; В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$; С) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

184. Положительные числовые ряды. Критерий сходимости положительных рядов.

185. Сравнение положительных рядов (теорема 1 и предельная теорема).

186. Признаки Коши и Даламбера сходимости положительных рядов.

187. Интегральный признак сходимости положительных рядов и его применение. Теорема об обобщенных гармонических рядах.

188. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница о знакопередающихся рядах.

189. Абсолютная и условная сходимость рядов. Положительная и отрицательная части числового ряда.

190. Признаки Даламбера и Коши абсолютной сходимости числового ряда.

191. Перестановка членов числового ряда (теорема 1 о переместительном свойстве положительных рядов; теорема 2 о переместительном свойстве абсолютно сходящихся рядов; теорема 3 о перемножении абсолютно сходящихся рядов).

192. Необходимое и достаточное условие сходимости (критерий Коши) числовой последовательности и числового ряда.

Тема 15. Функциональные последовательности и функциональные ряды.

193. Функциональная последовательность. Область сходимости и предельная функция.

194. Функциональные ряды. Область сходимости и предельная сумма функционального ряда.

195. Найдите области сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(x+3)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{x}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1+x-x^2}$.

196. Найдите все значения x , при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится абсолютно.

197. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2 + 1}$? Ответ обосновать.

198. Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда.

199. Сформулируйте и докажите теорему Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда.

200. Необходимое и достаточное условия равномерной сходимости функциональных рядов и функциональных последовательностей.

201. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Тема 16. Степенные ряды. Разложение функций в степенные ряды.

202. Понятие степенного ряда.

203. Сформулируйте теорему Абеля об интервале и радиусе сходимости степенного ряда.

204. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ расходится в точке $x_0 = -2$. С помощью теоремы Абеля установите, какое из следующих утверждений справедливо: а) этот ряд сходится абсолютно в точке $x_1 = -1$; в) этот ряд сходится в точке $x_2 = 0$; с) этот ряд расходится в точке $x_3 = 3$;

д) нет правильного ответа.

205. Найдите области сходимости степенных рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n 3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n 4^n}$.

206. Сформулируйте и докажите теорему о равномерной сходимости степенного ряда.

207. Сформулируйте и докажите свойства степенных рядов.

208. Разложение функции в степенной ряд.

209. Сформулируйте и докажите теорему о единственности разложения функции в степенной ряд.

210. Формула Тейлора.

211. Сформулируйте и докажите теорему об условии сходимости ряда Тейлора.

212. Сформулируйте и докажите теорему о разложении функции $f(x) = e^x$ в степенной ряд.

213. Сформулируйте и докажите теорему о разложении функции $f(x) = \sin x$ в степенной ряд.

214. Сформулируйте и докажите теорему о разложении функции

$f(x) = \cos x$ в степенной ряд.

215. Сформулируйте и докажите теорему о разложении функции $f(x) = \ln(1+x)$ в степенной ряд.

216. Сформулируйте и докажите теорему о разложении функции $f(x) = \arctg x$ в степенной ряд.

217. Сформулируйте и докажите теорему о разложении функции $f(x) = (1+x)^m$ в биномиальный ряд.

218. Что значит разложить функцию в степенной ряд? Зависят ли коэффициенты такого разложения от способа его получения? Разложив в ряд Маклорена функцию $f(x) = x/(1+x^2)$, найдите $f^{(2n+1)}(0)$.

219. Разложите функцию в ряд по степеням x и укажите область сходимости полученного ряда: а) e^{-x^2} ; б) $\ln(x^2 + 3x + 2)$; в) $\int_0^x \frac{\sin 2t}{t} dt$.

220. Разложите функцию $y = \operatorname{tg} x$ в ряд Тейлора по степеням $(x - \pi/4)$, выписав первые 3 члена, отличные от нуля.

221. Вычислите приближённо с точностью до 10^{-3} , оценив погрешность по признаку Лейбница для знакочередующегося ряда: $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$.

222. Понятие степенного ряда в комплексной области. Круг сходимости степенного ряда. Теорема Абеля.

223. Показательная и тригонометрические функции комплексной переменной. Формулы Эйлера.

Тема 17. Тригонометрические ряды. Ряд Фурье.

224. Тригонометрическая система функций и её ортогональность. Пример ортогональной системы функций.

225. Какие из следующих пар функций $f(x)$ и $g(x)$ ортогональны на промежутке $[-1, 1]$: а) $f(x) = x$ и $g(x) = x^3 - 1$; б) $f(x) = x$ и $g(x) = x^2 - 1$; в) $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^2 - 1$?

226. Понятие тригонометрического ряда.

227. Дайте определение ряда Фурье.

228. Комплексная форма ряда Фурье.

229. Сходимость ряда Фурье. Теорема Дирихле.

230. Ряды по косинусам и синусам.

231. Специальные приёмы разложения функций в зависимости от заданного интервала разложения.

232. Напишите формулы для коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$, разложенной в этот ряд в промежутках: а) $[-\pi, \pi]$; б) $[-l, l]$.

233. Напишите ряд Фурье нечётной функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-\pi, \pi]$.

234. Функция $f(x)$ в промежутке $[0, \pi]$ разложена в ряд Фурье а) по косинусам; б) по синусам. Напишите формулы для коэффициентов обоих рядов.

235. Функция $f(x) = -1 - x^2$ в промежутке $[-2, 0]$ разложена в ряд Фурье по синусам. Напишите формулы для коэффициентов ряда. Постройте график суммы этого ряда.

236. Разложите в ряд Фурье функцию $y = |x|$ в промежутках: а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0; 2\pi]$; в) $[-1; 1]$. Постройте графики функции и сумм этих рядов.

237. Разложите в ряд Фурье функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в промежутке $[0; \pi]$: а) по синусам; б) по косинусам. Постройте графики функции и сумм рядов.

Тема 18. Функции нескольких переменных

238. Функция двух переменных. Область определения и область значений функции двух переменных. Функция нескольких переменных.

239. Способы задания функции двух переменных. График функции двух переменных. Линии уровня.

240. Что такое ϵ -окрестность точки $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$?

241. Какое множество E называется ограниченным? замкнутым? связным?

242. Предел функции двух переменных.

243. Бесконечно малые функции двух переменных и их свойства.

244. Непрерывность в точке функции двух переменных.

245. Частные производные функции нескольких переменных. Частные приращения и частные производные функции двух переменных.

246. Функция двух переменных, дифференцируемая в точке.

247. Полный дифференциал функции в точке.

248. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции двух переменных.

249. Производная и дифференциал сложной функции двух переменных.

250. Запишите формулу для производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

251. Запишите формулу для производной $\frac{dy}{dx}$ неявной функции, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

252. Запишите формулы для производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции, заданной уравнением: $F(x, y, z) = 0$.

Тема 19. Вычисление частных производных высших порядков функции нескольких переменных. Производная по направлению и градиент функции

нескольких переменных

253. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных.

254. Дифференциал функции двух переменных и его основные свойства.

255. Дифференциалы высших порядков функции двух переменных.

256. Производная по направлению функции нескольких переменных.

257. Градиент функции нескольких переменных в точке.

258. Сформулируйте определение производной функции $u = f(M) = f(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{l}$.

259. Запишите формулу, выражающую производную функции $u = f(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{l^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ через частные производные функции u .

260. Запишите формулу, связывающую $\text{grad } u$ и производную $\frac{\partial u}{\partial l}$ в заданной точке скалярного поля u .

261. Как связаны направления наибольшего роста функции $u = f(x, y, z)$ с вектором $\text{grad } u$ в рассматриваемой точке $M(x, y, z)$?

Тема 20. Экстремумы функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных.

262. Сформулируйте определение локального максимума (локального минимума) функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

263. Что такое стационарная точка функции $z = f(x, y)$?

264. Необходимые и достаточные условия существования экстремума функции $z = f(x, y)$?

265. Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум.

266. Абсолютные и условные экстремумы функции.

267. Алгоритм поиска абсолютного экстремума функции в заданной области.

268. Сформулируйте правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области.

269. Сформулируйте определение условного максимума функции $u = f(M)$ при связи $\varphi(M) = 0$ (рассмотрите случай двух или трех переменных).

270. Сформулируйте необходимые условия условного экстремума функции $u = f(M)$ при связи $\varphi(M) = 0$ по методу Лагранжа.

271. Сформулируйте теорему Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной в замкнутой ограниченной области.

272. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о существовании наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной в замкнутой

ограниченной области.

Тема 21. Двойные интегралы.

273. Квадрируемые фигуры и их площади. Признак квадрируемости фигуры.
274. Понятие интегральной суммы для функции двух переменных.
275. Понятие двойного интеграла.
276. Геометрический смысл двойного интеграла.
277. Необходимое условие существования двойного интеграла.
278. Суммы Дарбу для функции двух переменных. Признак интегрируемости функции двух переменных.
279. Достаточные условия существования двойного интеграла.
280. Свойства двойного интеграла, выражаемые равенствами и следствия из них.
281. Свойства двойного интеграла, выражаемые неравенствами.
282. Найдите среднее значение $f(x, y) = x + 2y$ по прямоугольнику, ограниченному прямыми $x = 1$, $y = 2$ и осями координат.
283. Понятие повторного интеграла.
284. Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием (теоремы 1 и 2).
285. Интегрируема ли функция $1/(x - y)$ по квадрату $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$?
286. Сведите двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ к повторному интегралу двумя способами, если: а) (D) – область, ограниченная линиями $y = 3x^2$, $y = 6 - 3x$; б) (D) – трапеция с вершинами $(-1, 4)$, $(5, 4)$, $(1, 1)$, $(4, 1)$.
287. Измените порядок интегрирования в интеграле:
 $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{-x^2-2x}}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f(x, y) dy.$
288. Вычислить двойной интеграл по области D :
$$\iint_D \frac{xdxdy}{(x^2 + y^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}; \quad D: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$
289. Понятие регулярного отображения плоских областей.
290. Теорема о примере регулярного отображения.
291. Изобразите на плоскости Oxy образ фигуры $G' = \{(r, \phi): 2 \leq r \leq 3, 0 \leq \phi \leq \pi/4\}$ при отображении $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$. Является ли это отображение взаимно однозначным?
292. Теорема о замене переменных в двойном интеграле.
293. Теорема о преобразовании двойного интеграла к полярным координатам.

Тема 22. Тройные интегралы.

294. Понятие тройного интеграла.
 295. Свойства тройного интеграла.
 296. Вычисление тройного интеграла (теоремы 1 и 2).
 297. Тройной интеграл в сферических и цилиндрических координатах.
 298. Вычислить тройной интеграл по области G :

$$\iiint_G 2y^2 e^{xy} dx dy dz ; G = \{(x, y, z) : x = 0, y = 1, y = x, z = 0, z = 1\}.$$

299. Вычислить тройной интеграл по области G :

$$\iiint_G x^2 z \sin(xyz) dx dy dz ; G = \{(x, y, z) : x = 2, x = 0, y = \pi, y = 0, z = 0, z = 1\}.$$

Тема 23. Применение кратных интегралов.

300. Применение кратных интегралов к вычислению площадей плоских фигур.

301. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
 а) $xy = 4, x + y = 5$; б) $(x^2 + y^2) = 8xy, x^2 + y^2 = 1 (x^2 + y^2 \leq 1)$.

302. Применение кратных интегралов к вычислению объемов тел.

303. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями
 $z = \ln(1 + x^2 + y^2), z = 0, x^2 + y^2 = 2$.

304. Вычисление массы и координат центра тяжести плоской фигуры и тела.

305. Найти центр тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной половиной эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, опирающейся на большую ось.

306. Вычисление площади поверхности.

307. Найти площадь той части плоскости $6x + 3y + 2z = 12$, которая заключена в первом октанте.

308. Вычисление моментов инерции плоской фигуры и тела.

309. Определить полярный момент инерции площади, ограниченной линиями $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x = 0, y = 0$.

Тема 24. Криволинейные интегралы.

310. Задачи, приводящие к криволинейным интегралам.

311. Понятие криволинейного интеграла первого рода и его свойства.

312. Понятие криволинейного интеграла второго рода и его свойства.

313. Теорема о существовании криволинейного интеграла и формуле для его вычисления.

314. Вычисление работы переменной силы с помощью криволинейного интеграла.

315. Теорема о формуле Римана-Грина и следствие из нее.

316. Применение формулы Римана-Грина.

317. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути

интегрирования.

318. Вычислить интегралы: а) $\int_{AB} 2xydx + x^2dy$; б) $\int_{AB} \cos 2ydx - 2x\sin 2ydy$

по любой линии от точки $A(1; \frac{\pi}{6})$ до точки $B(2; \frac{\pi}{4})$.

319. Даны точки $A(-a; 0)$ и $B(0; a)$. Вычислить работу силы $\vec{F}(P; Q)$, где $P = y$, $Q = y - x$, при перемещении единицы массы:

а) по прямой OA ;

в) по ломаной AOB .

320. Написать и проверить формулу Римана-Грина для интеграла $\oint_L (x + y)dx - 2xydy$ по контуру треугольника со сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

321. Применив формулу Римана-Грина, вычислить $\oint_L y^2dx + (x + y)^2dy$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A(a; 0)$, $B(a; a)$, $C(0; a)$.

322. Вычислить двумя способами интеграл $\int_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$, если контуром интегрирования L является окружность $x^2 + y^2 = R^2$:

а) непосредственно; б) с помощью формулы Римана-Грина.

Тема 25. Поверхностные интегралы.

323. Определение поверхностного интеграла первого рода.

324. Вычисление поверхностных интегралов первого рода.

325. Определение поверхностного интеграла второго рода.

326. Вычисление поверхностных интегралов второго рода.

327. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.

Вычислить поверхностные интегралы первого рода (по площади поверхности):

328. $\iint_{\sigma} (6x + 4y + 3z)ds$, где σ - часть плоскости $x + 2y + 3z = 6$, расположенная в первом октанте;

329. $\iint_W (y + z + \sqrt{a^2 - x^2})ds$, где W - поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = h$.

Тема 26. Теория поля.

330. Понятие скалярного поля.

331. Производная по направлению и градиент.

332. Понятие векторного поля.

333. Поток векторного поля через ориентированные поверхности.

334. Основные свойства и физический смысл потока векторного поля.
335. Теорема Остроградского.
336. Дивергенция векторного поля и её свойства.
337. Физический смысл дивергенции векторного поля.
338. Понятие соленоидального поля.
339. Основные свойства соленоидального поля.
340. Работа силового поля.
341. Циркуляция векторного поля.
342. Теорема Стокса.
343. Ротор векторного поля и его свойства.
344. Потенциальное поле, его свойства. Условие потенциальности.
345. Найти производную скалярного поля $u = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz$ в точке $(1,1,1)$ по направлению нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$ (нормаль образует острый угол с положительным направлением оси Oz).
346. Найти дивергенцию, ротор, соленоидальность и потенциальность векторного поля $\vec{F} = (2y - z)\vec{i} + (3x + 2z)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
347. Найти: 1) поток заданного векторного поля $\vec{F} = (x + z)\vec{i}$ через внешнюю часть S заданной плоскости $P: x + y + z - 2 = 0$, которая вместе с координатными плоскостями образует пирамиду V ; 2) циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ вдоль границы L поверхности S в направлении противоположном движению часовой стрелки: а) непосредственно; б) по формуле Стокса.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «фронтальный и индивидуальный опрос»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или

	письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Контрольные работы:

1 семестр

Тема 1. Множество действительных чисел.

Тема 2. Функции одной переменной.

Контрольная работа 1

Вариант № 0

1. Решить неравенство: $|x-1| + 3 \cdot |x| < 4$;
2. Найти область определения функции:
а) $y = \lg \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x - 6}$; б) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{7-x}$;
3. Доказать, что функция $y = x^2 - 10x$ возрастает строго на $(5; +\infty)$;
4. Дан график функции $y = \frac{1}{x}$. С помощью каких элементарных

преобразований получается график функции $y = \frac{2x-3}{3x-2}$?

Тема 3. Пределы.

Тема 4. Непрерывность функции.

Тема 5. Непрерывность функции на отрезке.

Контрольная работа 2

Вариант № 0

1. Вычислить предел:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 6}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{\sin x + \sin 2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)$;

д) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)^{\frac{2}{1-x}}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{\sin x + \sin 5x}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции, определить их род и построить график:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

3. Найти не вертикальные асимптоты графика функции $y = \frac{4x^2}{3+x^2}$.

Тема 6. Производная функции одной переменной.

Тема 7. Дифференциал функции одной переменной.

Тема 8. Основные свойства дифференцируемых функций и их

применение.

Контрольная работа 3

Вариант № 0

1. Найти производную функции:

а) $y = \ln \arcsin \sqrt{1-x^2}$

б) $y = (2x+3)^{\lg x}$;

2. С помощью дифференциала вычислить приближенное значение $\cos 44^\circ$;

3. Найти уравнения касательной и нормали к кривой: $y = x^3 - 3x^2 + 3$ в точке $x_0 = 3$.

4. Точка движется прямолинейно по закону $s = \frac{4}{3}t^3 - t + 5$. Найти скорость и ускорение точки в заданный момент времени $t = 2$ с.

5. Найти интервалы монотонности и точки локального экстремума функции: $y = \frac{2x^2}{2x-1}$.

6. Вычислить наименьшее и наибольшее значения функции: $y = \frac{4x-1}{x^2+3}$ на $[0; 4]$.

7. Найти направление выпуклости и точки перегиба графика функции: $y = 3x^2 - x^3$.

2 семестр

Тема 9. Неопределенный интеграл.

Контрольная работа 1

Вариант № 0

Вычислить неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{\operatorname{tg}(3x-1)dx}{\cos^2(3x-1)}$;

2. $\int (x^2 + x + 1) \cdot \ln x dx$;

3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}}$;

4. $\int \frac{1 + \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{x-2}} dx$;

5. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}}$;

6. $\int \frac{dx}{\cos x}$;

7. $\int \frac{8 \cdot x^2 dx}{x^4 - 16}$;

8. $\int \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x dx$.

Тема 10. Определенный интеграл.

Тема 11. Применение определенного интеграла.

Тема 12. Несобственные интегралы.

Контрольная работа 2

Вариант № 0

1. Вычислить определенный интеграл:

а). $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ б). $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx$ в). $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $y = x^2$; $y = -x + 2$.

3. Вычислить длину дуги кривой: $y = \ln(1 - x^2)$ ($-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$).

4. Вычислить несобственный интеграл: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

Тема 13. Числовые ряды.

Тема 14. Функциональные последовательности и функциональные ряды.

Контрольная работа 3

Вариант № 0

Выяснить, сходится ли данный ряд?

1 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{n^2+1} \right)^2$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$.

Выяснить, сходится ли данный ряд и, если сходится, то как: абсолютно или условно?

2 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n} + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n!}$.

Найти область сходимости функционального ряда.

3 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 \cdot x^2 + 1}{n^2 + 1} \right)^n$.

Доказать, что данный функциональный ряд сходится равномерно на указанном промежутке.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 \cdot \sin nx}{n^2 + n + x^2}$ на $[-1; 1]$.

Тема 15. Степенные ряды. Разложение функций в степенные ряды.

Тема 16. Тригонометрические ряды. Ряд Фурье.

Контрольная работа 4

Вариант № 0

1. Найти сумму степенного ряда, применяя интегрирование, и указать область сходимости: $2 - 8x + 24x^2 - 64x^3 + \dots$.

2. Найти сумму степенного ряда, применяя дифференцирование ряда, указать область сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+4}}{5^n \cdot (2n+4)}$.

3. Найти первые пять членов разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 : $f(x) = x^{-2} + x^{-3} - 3x^{-10} + 7x^{-14}$, $x_0 = 1$.

4. Вычислить приближенно $\ln 1,02$ с точностью $\delta = 10^{-4}$.

5. Вычислить интеграл $\int_0^{0,1} e^{-4x^2} dx$ с точностью до 0,001.

6. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2\pi$ функцию $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi, 0]; \\ 2 - x, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$.

3 семестр

Тема 17. Функции нескольких переменных.

Тема 18. Вычисление частных производных высших порядков функции нескольких переменных. Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных.

Тема 19. Экстремумы функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных.

Контрольная работа 1

Вариант № 0

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u^2 \cdot \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$.

2. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, если $z = \sin xy$.

3. Дана функция $z = \arctg(x^2 \cdot y^2)$. Найти: 1). $\text{grad } z$ в точке $A(1; -1)$;

2). производную функции z в точке A в направлении вектора $l = 5i - 12j$.

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 - xy + y^2$ в точке $C(1; 2; 4)$.

5. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2 - 2x - 4 \cdot \sqrt{xy} - 2y + 8$.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми: $x=0$; $y=0$; $x=1$; $y=2$.

Тема 20. Двойные интегралы.

Тема 21. Тройные интегралы.

Контрольная работа 2

Вариант № 0

1. Вычислить двойной интеграл по области D:

$$\iint_D \frac{x dx dy}{(x^2 + y^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}; \quad D: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

2. Вычислить двойной интеграл по области D:

$$\iint_D y \ln x dx dy; \quad D: xy = 1, \quad x = 2, \quad y = \sqrt{x}.$$

3. Вычислить тройной интеграл по области G:

$$\iiint_G x^2 z \sin(xyz) dx dy dz; \quad G = \{(x, y, z): x = 2, x = 0, y = \pi, y = 0, z = 0, z = 1\}.$$

Тема 22. Применение кратных интегралов.

Тема 23. Криволинейные интегралы.

Контрольная работа 3

Вариант № 0

1. Найти площадь той части плоскости $6x + 3y + 2z = 12$, которая заключена в первом октанте.

2. Найти центр тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной половиной эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, опирающейся на большую ось.

3. Определить момент инерции относительно оси ОУ площади треугольника с вершинами A(1;1), B(1;3), C(4;5).

4. Вычислить $\int_L (1 - x^2) y dx + (1 + y^2) dy$, если контуром интегрирования L является окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

5. Применив формулу Римана-Грина, вычислить $\oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy$ по контуру треугольника ABC с вершинами A(a;0), B(a;a), C(0;a).

Тема 24. Поверхностные интегралы.

Тема 25. Дифференциальные уравнения.

Тема 26. Теория поля

Контрольная работа 4

Вариант № 0

1. Вычислить поверхностные интегралы первого рода (по площади поверхности):

$$\iint_{\sigma} (6x + 4y + 3z) ds, \quad \text{где } \sigma - \text{часть плоскости } x + 2y + 3z = 6,$$

расположенная в первом октанте.

2. Вычислить поверхностные интегралы второго рода (по координатам):

$$\iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \text{ где } \sigma - \text{нижняя сторона круга } x^2 + y^2 \leq a^2.$$

3.

Най

ти производную скалярного поля $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$ в точке $\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$ по направлению нормали к поверхности $S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4$ (нормаль образует острый угол с положительным направлением оси Oz).

4. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:

а) $xy' + y = \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi};$

б) $y' - xy - y^3 e^{-x^2} = 0;$

в) $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «контрольная работа»

Шкала оценивания (интервал баллов)	Критерий оценивания
5	Контрольная работа выполнена на высоком уровне (правильные ответы даны на 90-100% вопросов/задач)
4	Контрольная работа выполнена на среднем уровне (правильные ответы даны на 75-89% вопросов/задач)
3	Контрольная работа выполнена на низком уровне (правильные ответы даны на 50-74% вопросов/задач)
2	Контрольная работа выполнена на неудовлетворительном уровне (правильные ответы даны менее чем на 50%)

Типовые варианты индивидуальных заданий:

Семестр 1.

Задание 1

Вычислить пределы функций:

Таблица 1.

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}$

Задание 2

Вычислить производные функций, заданных явно:

Таблица 2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
1	$y = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+2}}$	$y = e^{x^2-4x}$	$y = \lg^3(x+5)^2$	$y = \cos^2(2x^2+1)$	$y = \arcsin^2 \frac{x^2}{2x}$

Задание 3

Вычислить производные функций:

Таблица 3

№ пп	а)	б)	в)
1	$y = (\ln x)^x$	$\cos(x \cdot y) + x - y = 0$	$\begin{cases} x = \sin^2 t + t \\ y = \cos t + 2 \end{cases}$

Задание 4

Составить уравнения касательной и нормали в точке $x_0 = m$ к параболе:

$y = nx^2 + (n-1)x + m$, где m – число гласных букв в фамилии, n – число согласных букв в фамилии.

Задание 5

Исследовать функцию методом дифференциального исчисления и построить график:

Таблица 4

№№	f(x)	№№	f(x)
1	$y = \frac{x^3}{x-1}$	2	$y = \frac{x^3}{x^4-1}$

Семестр 2.

Индивидуальное задание № 1

№ п/п	Номера задач									
1	1.1	2.1	3.1	3.11	4.1	4.11	5.1	5.11	6.1	6.11

1. Простейшие приёмы интегрирования

1.1. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$

1.2. $\int \sin^4 x dx$

2. Замена переменной

2.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx$

2.2. $\int x^2 e^x \sin x dx$

3. Интегрирование рациональных функций

3.1. $\int \frac{x}{2x^2 - 3x - 2} dx$

3.2. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$

4. Интегрирование тригонометрических функций

$$4.1. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx \int \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$$

5. Интегрирование иррациональных функций. Несобственные интегралы

$$5.1. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$$

$$5.2. \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Индивидуальное задание № 2

2. Вычисление определенных интегралов

$$1.1. \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$1.2. \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$$

2. Вычисление площадей фигур

2.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.

3. Вычисление длины дуги

3.1. Найти длину дуги линии $\ln x$ от точки $x_1 = \sqrt{3}$ до точки $x_2 = \sqrt{8}$.

Семестр 3.

Индивидуальное задание № 1

Задание № 1. Исследовать положительные ряды на сходимость:

$$1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}.$$

Задание № 2. Исследовать числовой ряд на сходимость и установить характер сходимости (абсолютная, условная):

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}. \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n.$$

Задание № 3. Найти область сходимости функционального ряда:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n n (x+2)^n}. \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! (x+3)^n}.$$

Задание № 4. Найти область сходимости заданных степенных рядов:

$$1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}.$$

Задание № 5. Разложить заданную функцию $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки x_0 . Найти область сходимости полученного степенного ряда к данной функции.

1. $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$.

2. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$.

Задание № 7. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2\pi$ функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0); \\ 4x - 3, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & x \in [-\pi, 0]; \\ 0, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$

Индивидуальное задание № 2

Задание № 1. Найти частные производные z_x, z_y функции $z = f(x, y)$.

1.1. $z = \ln(3x - x^2 + 5xy)$;

1.2. $z = \sqrt{3xy - x^2 + 5y^2}$;

Задание № 3. Найти: а) производную функции $z = f(x, y)$ в точке М по направлению вектора $\vec{l}$;

б) градиент функции $z = f(x, y)$ в точке М.

3.1. $z = \cos^3 y + \ln(x^2 + y^2)$; $M(1, 1)$, $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j}$;

Задание № 4. Проверить заданное соотношение для функции $z = f(x, y)$.

4.1. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $z = e^{xy}$;

Задание № 5. Вычислить наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в заданной области D , которая определена системой неравенств. Построить область D .

5.1. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$, $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$;

Индивидуальное задание № 3

Задание № 1. Вычислить повторный интеграл:

1.1. $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx$.

1.2. $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$.

Задание № 2. Найти уравнения линий, ограничивающих область интегрирования. Сделать рисунок области интегрирования:

2.1. $\int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x; y) dx$.

2.2. $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x; y) dy$.

Задание № 3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

3.1. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x; y) dy$.

3.2. $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x; y) dy$.

Задание № 4. Вычислить двойной интеграл:

4.1. $\iint_D (x+y) dx dy; 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2.$ 4.2.

$\iint_D xy(x-y) dx dy; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$

Задание № 5. С помощью перехода к полярным координатам вычислить двойной интеграл:

5.1. $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) dy.$

Задание № 6. С помощью двойных интегралов вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

6.1. $y = x^2; y = x + 2.$ 6.2. $x = y^2 - 2y; x + y = 0.$

Задание № 7. С помощью двойных интегралов вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

7.1. $z = 5 - x; y^2 = 5x; z = 0.$

Задание № 8. Вычислить тройной интеграл по области G .

8.1. $\iiint_G 2y^2 e^{xy} dx dy dz;$

$G = \{(x, y, z): x=0, y=1, y=x, z=0, z=1\}$

Задание № 9. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению нормали к поверхности S (нормаль образует острый угол с положительным направлением оси Oz).

№	u	S	M_0
9.1.	$u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$	$x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$	$(1, 1, 1)$

Задание № 10. Найти:

- 1) Поток заданного векторного поля $\vec{F}$ через внешнюю часть S заданной плоскости P , которая вместе с координатными плоскостями образует пирамиду V ;
- 2) Циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ вдоль границы L поверхности S в направлении противоположном движению часовой стрелки.

а) непосредственно; б) по формуле Стокса.

№	$\vec{F}$	P
10.1.	$(x+z)\vec{i}$	$x+y+z-2=0$

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «индивидуальные задания»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
Зачтено	Правильно решены 90-100% заданий
Не зачтено	Правильно решены менее 90% заданий

Оценочные средства для промежуточной аттестации (экзамен)

Типовые экзаменационные билеты

Билет. Семестр I.

Билет № 1

1. Множество действительных чисел. Модуль действительного числа и его свойства. 1 балл
2. Решить неравенство: $|x^2 - 5x - 5| < 9$. 1 балл
3. Производная суммы, разности, произведения и частного двух функций. Теорема о производной композиции двух функций. 1 балл
4. Найти y' , если $y = e^{-5x^4} \cdot \sin 3x$. 1 балл
5. Односторонняя непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва. 1 балл
Найти точки разрыва функции, определить их род и построить график:
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2, & x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}.$$

Утверждено на заседании кафедры ПМ, протокол №___ от _____ 2023 г.

Заведующий кафедрой

доц. Малый В.В.

Лектор

доц. Темникова С.В.

Билет № 1

1. Понятие первообразной. Теорема о первообразной. Понятие неопределенного интеграла. 1 балл

Вычислить неопределенный интеграл: $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$.

2. Теорема о разложении функции $f(x) = e^x$ в степенной ряд. 1 балл

Вычислить приближенно $\sqrt[4]{e}$ с точностью $\delta = 10^{-4}$.

3. Теорема об интегрировании по частям в определенном интеграле. 1 балл

Вычислить определенный интеграл: $\int_1^e \ln^2 x dx$.

4. Выяснить, сходится ли данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$? 1 балл

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a \sin 2\varphi$. 1 балл

Утверждено на заседании кафедры ПМ, протокол №___ от _____ 2023 г.

Заведующий кафедрой

доц. Малый В.В.

Лектор

доц. Темникова С.В.

Билет № 1

1. Исследовать функцию двух переменных $z = x^3 + y^3 - 6xy + 10$ на экстремум. 1 балл
2. Определить момент инерции относительно оси OX площади треугольника с вершинами A(1;1), B(2;1), C(3;3). 1 балл
3. Понятие криволинейного интеграла первого рода и его свойства. 1 балл
4. Найти производную скалярного поля $u = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz$ в точке $M_0(1,1,1)$ по направлению нормали к поверхности $S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$ (нормаль образует острый угол с положительным направлением оси Oz). 1 балл
5. С помощью двойных интегралов вычислить объём тела, ограниченного поверхностями: $z = 5 - x$; $y^2 = 5x$; $z = 0$. 1 балл

Утверждено на заседании кафедры ПМ, протокол №__ от _____ 2023 г.

Заведующий кафедрой

доц. Малый В.В.

Лектор

доц. Темникова С.В.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству промежуточный контроль (экзамен)

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объеме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно четкие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)

Экспертное заключение

Представленный фонд оценочных средств (далее – ФОС) по дисциплине «Математический анализ» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые формы и средства текущего и промежуточного контроля адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 09.03.04 Программная инженерия.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины представлены в полном объеме.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанный и представленный для экспертизы фонд оценочных средств рекомендуется к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической
комиссии факультета компьютерных
систем и информационных
технологий



Ветрова Н. Н.