

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Антрацитовский институт геосистем и технологий

Кафедра инженерии и общеобразовательных дисциплин



УТВЕРЖДАЮ

Директор
Антрацитовского института
геосистем и технологий

доц. Крохмалёва Е.Г.

«27» 10 2023 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по учебной дисциплине

Высшая математика

Направление подготовки 38.03.02 Менеджмент

Профиль Менеджмент организаций

Разработчики:

доцент Е.Г. Крохмалева

старший преподаватель А.А. Омельченко

ФОС рассмотрен и одобрен на заседании кафедры инженерии и
общеобразовательных дисциплин

от «14» 04 20 23 г., протокол № 9

Заведующий кафедрой

инженерии и общеобразовательных дисциплин Е.Г. Крохмалева

Антрацит 2023 г.

**Паспорт
фонда оценочных средств по учебной дисциплине
Высшая математика**

Перечень компетенций (элементов компетенций), формируемых в результате освоения учебной дисциплины (модуля)

№ п/п	Код контроли- руемой компетен- ции	Формулировка контролируемой компетенции	Контролируемые темы учебной дисциплины	Этапы формиро- вания (семестр изучения)
1	УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	Тема 1. Матрицы. Основные понятия. Операции над матрицами Тема 2. Определители. Определители второго, третьего и n-го порядка. Их вычисление. Свойства определителей. Тема 4. Обратная матрица. Матричные уравнения. Тема 5. Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия. Теорема Кронекера - Капелли. Тема 6. Методы решения систем уравнений: метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод. Тема 7. Однородные и неоднородные системы линейных алгебраических уравнений. Тема 11. Смешанное произведение векторов. Свойства, вычисление, геометрический смысл. Применения векторного исчисления к решению задач геометрии, механики, физики, электротехники. Тема 12. Системы координат на плоскости. Уравнение линии на плоскости. Прямая на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Тема 14. Общее уравнение линий второго порядка. Тема 17. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения. Поверхности второго порядка. Тема 18. Понятие функции. Способы задания функций. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Характеристика поведения функций. Тема 22. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва. Непрерывность основных элементарных функций. Тема 23. Производная функции, ее	1, 2

			геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью. Тема 24. Правила дифференцирования функций. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Тема 25. Вычисление производных основных элементарных функций. Таблица производных. Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций. Производные высших порядков. Тема 26. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Основные свойства дифференциалов. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Дифференциалы высших порядков. Тема 27. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правила Лопиталя. Тема 28. Применение производных к исследованию поведения функций. Условия постоянства, возрастания и убывания функций на промежутке. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Формула Тейлора. Выпуклость - вогнутость, точки перегиба графика функции. Достаточные условия выпуклости - вогнутости. Условия существования точки перегиба графика функции. Тема 30. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Простейшие методы интегрирования. Метод подстановки. Тема 31. Интегрирование по частям. Тема 32. Интегрирование рациональных дробей. Тема 33. Интегрирование тригонометрических дифференциалов, универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование некоторых иррациональных выражений. Тема 37. Приближенное вычисление определенных интегралов. Приложения определенного интеграла к задачам геометрии, механики, физики. Тема 38. Функции нескольких переменных. Область определения. Геометрическое изображение функции двух переменных.	
--	--	--	--	--

			Предел, непрерывность функции нескольких переменных. Тема 42. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Поле направлений. Интегральные кривые. Тема 49. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Тема 51. Системы дифференциальных уравнений. Общие понятия. Методы решения.	
--	--	--	---	--

**Показатели и критерии оценивания компетенций,
описание шкал оценивания**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Показатель оценивания (знания, умения, навыки)	Контролируемые темы учебной дисциплины	Наименование оценочного средства
1	УК-1	знать: способы осуществления поиска, критического анализа и синтеза информации, системный подход для решения поставленных задач уметь: осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач владеть навыками: осуществления поиска, критического анализа и синтеза информации, системного подхода для решения поставленных задач	Тема 1. – Тема 51	опрос теоретического материала, выполнение практических работ, выполнение индивидуального задания.

**Фонды оценочных средств по дисциплине
«Высшая математика»**

Опрос теоретического материала (первый семестр)

Тема 1. Матрицы. Основные понятия. Операции над матрицами.

1. Понятие матрицы.
2. Типы матриц.
3. Способы представления матриц.
4. Арифметические операции над матрицами.
5. Свойства линейных операций.
6. Произведение матриц.
7. Свойства произведения.
8. Транспонирование матриц.
9. Элементарные преобразования матриц.
10. Эквивалентные матрицы.

Тема 2. Определители. Определители второго, третьего и n -го порядка.

Их вычисление. Свойства определителей.

1. Что называется определителем?
2. Свойства определителей.
3. Как вычисляются определители второго порядка?
4. Как вычисляются определители третьего порядка?
5. Правила нахождения определителей n -го порядка.
6. Что называется минором определителя n -го порядка?
7. Что называется алгебраическим дополнением определителя n -го порядка?
8. Разложение определителя по элементам некоторого ряда

Тема 3. Ранг матрицы. Эквивалентные преобразования матриц.

1. Что называется рангом матрицы.
2. Какие преобразования матрицы называются элементарными?
3. Что называется минором определителя n -го порядка?
4. Какой минор называется базисным?
5. Как определяется и находится ранг матрицы.
6. Свойства ранга матрицы.

Тема 4. Обратная матрица. Матричные уравнения.

1. Вырожденные и невырожденные матрицы.
2. Обратная матрица.
3. Свойства обратной матрицы.
4. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
5. Матричные уравнения.
6. Решение матричных уравнений.

Тема 5. Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия. Теорема Кронекера - Капелли.

1. Что представляет собой система линейных уравнений с n неизвестными?

2. Теорема Кронекера-Капелли.
3. Правило решения произвольной системы линейных уравнений.
4. Системы линейных алгебраических уравнений и их решение.
5. Условия совместности и несовместности для линейных систем.
6. Условия определенности и неопределенности для линейных систем.
7. Что называется решением системы линейных алгебраических уравнений?
8. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных алгебраических уравнений?
9. При каком условии система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение?
10. В каком случае однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение?

Тема 6. Методы решения систем уравнений: метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод.

1. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Перечислите этапы метода Гаусса.
3. Как по методу Гаусса можно найти ранг системы линейных алгебраических уравнений?
4. Опишите исследование на совместность системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
5. В чем состоит матричный способ решения системы линейных алгебраических уравнений?
6. Какие прикладные задачи можно решать матричным способом?
7. В каком случае применимы формулы Крамера?
8. Назовите формулы Крамера.

Тема 7. Однородные и неоднородные системы линейных алгебраических уравнений.

1. Системы однородных линейных уравнений.
2. Фундаментальная система решений линейной однородной системы.
3. Общее решение однородной линейной системы.
4. Какие неизвестные называются базисными.
5. Какие неизвестные называются свободными.
6. Какие решения системы называются линейно независимыми.
7. Необходимость и достаточность существования ненулевых решений системы однородных линейных уравнений.
8. Какое решение называется нулевым или тривиальным.
9. Структура общего решения неоднородной линейной системы.
10. Что представляет собой общее решение неоднородной системы.

Тема 8. Векторы, основные определения. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора, длина, направляющие косинусы.

1. Что такое вектор?
2. Равенство векторов.
3. Линейные операции над векторами.

4. Проекция вектора на ось.
5. Свойства проекций.
6. Разложение вектора по ортам.
7. Модуль и длина вектора.
8. Какие величины называются скалярными.
9. Направляющие косинусы.
10. Коллинеарность векторов.
11. Координаты точки.
12. Координаты вектора.

Тема 9. Скалярное произведение векторов, его свойства, вычисление.

1. Скалярное произведение векторов.
2. Свойства скалярного произведения.
3. Что называется скалярным квадратом вектора.
4. Выражение скалярного произведения через координаты.
5. Угол между векторами.
6. Условие перпендикулярности векторов.
7. Проекция вектора на заданное направление.
8. Механический смысл скалярного произведения.

Тема 10. Векторное произведение векторов, его свойства, вычисление.

1. Векторное произведение векторов.
2. Выражение векторного произведения через координаты.
3. Свойства векторного произведения.
4. Модуль векторного произведения.
5. Условие коллинеарности векторов.
6. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.
7. Геометрический смысл векторного произведения.
8. Механический смысл векторного произведения.

Тема 11. Смешанное произведение векторов. Свойства, вычисление, геометрический смысл. Применения векторного исчисления к решению задач геометрии, механики, физики, электротехники.

1. Смешанное произведение трех векторов.
2. Геометрический смысл смешанного произведения.
3. Свойства смешанного произведения.
4. Правая и левая тройка векторов.
5. Выражение смешанного произведения через координаты.
5. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.
7. Компланарность векторов.
8. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Тема 12. Системы координат на плоскости. Уравнение линии на плоскости. Прямая на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

1. Основные понятия системы координат на плоскости.
2. Расстояние между двумя точками.

3. Деление отрезка в данном отношении и пополам.
4. Площадь треугольника.
5. Преобразование системы координат.
6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
7. Общее уравнение прямой.
8. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
9. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
10. Уравнение прямой в отрезках.
11. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
12. Полярное уравнение прямой.
13. Нормальное уравнение прямой.
14. Угол между двумя прямыми.
15. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
16. Расстояние от точки до прямой.

Тема 13. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Их геометрические свойства и уравнения.

1. Линии второго порядка на плоскости.
2. Определение окружности. Уравнение окружности.
3. Эллипс: определение эллипса, фокусы, вершины, оси, полуоси, эксцентриситет, директрисы эллипса, каноническое уравнение эллипса.
4. Исследование формы эллипса по его уравнению.
5. Гипербола: определение гиперболы, фокусы, вершины, центр, действительные и мнимые оси и полуоси, эксцентриситет, фокальные радиусы, директрисы, асимптоты гиперболы, основной прямоугольник гиперболы, каноническое уравнение гиперболы.
6. Уравнение равносторонней гиперболы, асимптотами которой служат оси координат.
7. Сопряженные гиперболы.
8. Исследование формы гиперболы по ее уравнению.
9. Парабола: определение параболы, фокус, директриса, вершина параболы, фокальный радиус точки, каноническое уравнение параболы.
10. Исследование форм параболы по ее уравнению.

Тема 14. Общее уравнение линий второго порядка.

1. Уравнение кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям.
2. Единое уравнение для окружности, эллипса, гиперболы и параболы.
3. Общее уравнение второго порядка.
4. Случаи вырождения эллипса, гиперболы и параболы.

Тема 15. Плоскость и прямая в пространстве.

1. Уравнение поверхности. Текущие координаты точек поверхности.
2. Уравнение сферы.
3. Уравнения линии в пространстве.
4. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно

данному вектору.

5. Общее уравнение плоскости.
6. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
7. Уравнение плоскости в отрезках.
8. Нормальное уравнение плоскости в векторной форме.
9. Нормальное уравнение плоскости в координатной форме.
10. Векторное уравнение прямой.
11. Параметрические уравнения прямой.
12. Канонические уравнения прямой.
13. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.
14. Общие уравнения прямой.

Тема 16. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

1. Угол между двумя плоскостями.
2. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
3. Угол между прямыми.
4. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
5. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости.
6. Угол между прямой и плоскостью
7. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
8. Пересечение прямой с плоскостью.
7. Условие принадлежности прямой плоскости.
8. Расстояние от точки до плоскости.

Тема 17. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения. Поверхности второго порядка.

1. Цилиндрические поверхности. Направляющая и образующая цилиндра.
2. Эллиптический, круговой, параболический и гиперболический цилиндры.
3. Поверхности вращения. Конические поверхности.
4. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.
5. Эллипсоид.
6. Однополостный гиперболоид.
7. Двухполостный гиперболоид.
8. Эллиптический параболоид.
9. Гиперболический параболоид.
10. Конус второго порядка.

Опрос теоретического материала (второй семестр)

Тема 18. Понятие функции. Способы задания функций. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Характеристика поведения функций.

1. Что называется функцией?
2. Что называется аргументом функции?
3. Что называется значением функции?
4. Что называется областью определения функции?

5. Что называется областью изменения функции?
6. Способы задания функции.
7. Какая функция называется возрастающей (убывающей)?
8. Какие функции называются монотонными?
9. Какая функция называется ограниченной?
10. Какая функция называется четной (нечетной)?
11. Какая функция называется периодической?
12. Какие функции относятся к основным или простейшим?

Тема 19. Предел переменной величины. Свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Их свойства. Связь переменной, предела и бесконечно малой.

1. Что называются последовательностью?
2. Какая последовательность называется ограниченной сверху (снизу)?
3. Предел переменной величины.
4. Свойства пределов.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.
6. Связь переменной, предела и бесконечно малой.
7. Понятие числовой последовательности
8. Что называется пределом числовой последовательности.
9. Сходящиеся и расходящиеся последовательности.
10. Свойства сходящихся последовательностей.

Тема 20. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Односторонние пределы. Математические неопределенности.

1. Приращение аргумента и приращение функции.
2. Определение предела функции в точке.
3. Основные теоремы о пределах.
4. Односторонние пределы.
5. Пределы функции при $x \rightarrow \infty$.
6. Бесконечно большие и бесконечно малые функции и их основные свойства.
7. Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций.
8. Признаки существования пределов.
9. Раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}, \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \right]$.
10. Раскрытие неопределенностей вида $\left[\infty - \infty, \left[1^{\infty} \right] \right]$.

Тема 21. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые функций.

1. Замечательные пределы.
2. Основные соотношения при использовании замечательных пределов.
3. Сравнение бесконечно малых функций.
4. Понятие эквивалентных бесконечно малых функций.
5. Свойства эквивалентных бесконечно малых функций.
6. Применение эквивалентных бесконечно малых функций при вычислении пределов.

Тема 22. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва. Непрерывность основных элементарных функций.

1. Определение непрерывности функции в точке.
2. Свойства функций, непрерывных в точке.
3. Непрерывность элементарных функций на отрезке.
4. Понятие точки разрыва.
5. Классификация точек разрыва.
6. Непрерывность элементарных функций.
7. Непрерывность сложной функции.
8. Непрерывность обратной функции.

Тема 23. Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью.

1. Определение производной функции в точке.
2. Какая функция называется дифференцируемой.
3. Определение касательной к кривой в точке.
4. Геометрический и механический смысл производной.
5. Уравнения касательной и нормали.
6. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью.

Тема 24. Правила дифференцирования функций. Производная обратной функции. Производная сложной функции.

1. Правила дифференцирования функций и их следствия.
2. Формулы дифференцирования функций.
3. Производная обратной функции.
4. Производная сложной функции.
5. Производные основных элементарных функций.
6. Гиперболические функции и их производные.

Тема 25. Вычисление производных основных элементарных функций. Таблица производных. Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций. Производные высших порядков.

1. Таблица производных основных элементарных функций.
2. Дифференцирование неявно заданных функций.
3. Логарифмическое дифференцирование.
4. Дифференцирование параметрически заданных функций.
5. Производные высших порядков явно заданной функции.
6. Механический смысл производной второго порядка.
7. Производные высших порядков неявно заданных функций.
8. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически.

Тема 26. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Основные свойства дифференциалов. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

1. Определение дифференциала функции.
2. Геометрический смысл дифференциала.
3. Основные теоремы о дифференциалах.
4. Инвариантность формы дифференциала первого порядка.
5. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
6. Дифференциалы высших порядков.

Тема 27. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правила Лопиталя.

1. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши и их геометрическая интерпретация.
2. Следствия из теоремы Лагранжа.
3. Правила Лопиталя.
4. Условия применения и формы представления правил Лопиталя.

Тема 28. Применение производных к исследованию поведения функций. Условия постоянства, возрастания и убывания функций на промежутке. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Формула Тейлора. Выпуклость - вогнутость, точки перегиба графика функции. Достаточные условия выпуклости - вогнутости. Условия существования точки перегиба графика функции.

1. Условия постоянства, возрастания и убывания функций на промежутке.
2. Понятие стационарных и критических точек функции и их геометрическая интерпретация.
3. Понятие монотонности функции, связь с касательными.
4. Экстремумы функции и их типы.
5. Понятие гладкой функции.
6. Необходимые и достаточные условия существования экстремума.
7. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
8. Выпуклость - вогнутость, точки перегиба графика функции.
9. Необходимое и достаточное условие существования точки перегиба.
10. Условия выпуклости - вогнутости.
11. Достаточное условие существования точки перегиба графика функции.
12. Понятие выпуклой функции, типы выпуклости.
13. Понятие асимптоты графика функции.
14. Типы асимптот и способы их построения.

Тема 29. Общий план исследования функций и построения графиков.

1. Как найти область существования функции?
2. Как найти точки пересечения графика с координатными осями?
3. Как найти интервалы знакопостоянства функции.
4. Как определить периодичность, четность и нечетность.

5. Как найти точки разрыва функции и исследовать их характер.
6. Какие свойства графика функции определяют с помощью первой производной.
7. Какие свойства графика функции определяют с помощью второй производной.
8. Как найти асимптоты графика функции.

Тема 30. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Простейшие методы интегрирования. Метод подстановки.

1. Что называется первообразной функции?
2. Дайте определение неопределенного интеграла.
3. Геометрический смысл совокупности первообразных функций.
4. В чем заключается метод непосредственного интегрирования.
5. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
6. В чем заключается метод интегрирования подстановкой.

Тема 31. Интегрирование по частям.

1. В чем состоит метод интегрирования по частям.
2. Типы интегралов, которые интегрируются по частям.
3. Назовите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
4. Выведите формулу интегрирования по частям.

Тема 32. Интегрирование рациональных дробей.

1. Какие функции называются рациональными?
2. Что называется правильной рациональной дробью?
3. Какую функцию называют дробно-рациональной?
4. Как можно представить неправильную рациональную дробь?
5. Как можно представить правильную рациональную дробь?
6. Общее правило интегрирования рациональных дробей.

Тема 33. Интегрирование тригонометрических дифференциалов, универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

1. Какая подстановка называется универсальной тригонометрической подстановкой?
2. Правила применения тригонометрических подстановок.
3. Типы интегралов, к которым применима тригонометрическая подстановка.
4. Правила интегрирования иррациональных функций.

Тема 34. Задачи, приводящие к определенному интегралу. Определенный интеграл как предел интегральных сумм, его смысл в различных задачах. Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.

1. Какую фигуру называют криволинейной трапецией?
2. Какую сумму называют интегральной суммой?
3. Дайте определение определенного интеграла.
4. Сформулировать теорему существования определенного интеграла.

5. Основные свойства определенного интеграла.
6. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.

Тема 35. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов.

1. Сформулировать формулу Ньютона-Лейбница.
2. Метод интегрирования по частям определенном интеграле.
3. Метод замены переменной в определенном интеграле.
4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.
5. Схемы применимости определенного интеграла.
6. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Тема 36. Несобственные интегралы с бесконечными пределами (1-го рода) и от неограниченных функций (2-го рода), их основные свойства.

1. Дайте определение несобственного интеграла первого рода (интеграл, у которого один предел бесконечен).
2. Дайте определение несобственного интеграла второго рода (интеграл то неограниченной функции).
3. Признак сравнения несобственного интеграла первого рода.
4. Признак абсолютной сходимости несобственного интеграла первого рода.
5. Признаки сходимости несобственного интеграла второго рода.
6. При выполнении какого условия несобственный интеграл второго рода называется абсолютно сходящимся?

Тема 37. Приближенное вычисление определенных интегралов. Приложения определенного интеграла к задачам геометрии, механики, физики.

1. Перечислить наиболее применяемые формулы приближенного вычисления определенных интегралов.
2. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью формулы средних прямоугольников.
3. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью формулы трапеций.
4. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью формулы парабол.
5. Вычисление объёма тела вращения с помощью определенного интеграла.
6. Вычисление площади поверхности тел вращения с помощью определенного интеграла.
7. Вычисление длины дуги плоской кривой с помощью определенного интеграла.
8. Механические приложения определенного интеграла.

Тема 38. Функции нескольких переменных. Область определения. Геометрическое изображение функции двух переменных. Предел, непрерывность функции нескольких переменных.

1. Что называется функцией двух переменных?
2. Что называется областью определения функции двух переменных?
3. Что называется аргументами функции двух переменных?

4. Что называется областью изменения функции?
5. Что называют границей области?
6. Линии и поверхности уровня.
7. Предел функции нескольких переменных.
8. Непрерывность функции нескольких переменных в точке.
9. Что называется точкой разрыва функции?
10. Что называется поверхностью разрыва функции?

Тема 39. Частные производные функции нескольких переменных, их геометрический смысл. Полный дифференциал. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

1. Что называется частной производной функции?
2. Как определяется частная производная функции нескольких переменных?
3. Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных.
4. Что называется полным приращением функции?
5. Необходимое условие дифференцируемости функции.
6. Достаточное условие дифференцируемости функции.
7. Что называется полным дифференциалом функции?
8. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Тема 40. Дифференцирование функций, заданных неявно. Дифференцирование сложной функции.

1. Какая функция называется сложной?
2. Понятие полной производной.
3. Инвариантность формы дифференциала.
4. Какая функция называется неявной?
5. Теорема существования неявных функций.
6. Производные и дифференциалы высших порядков.

Тема 41. Экстремумы функции двух переменных, необходимые и достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум. Наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области.

1. Какая точка называется точкой максимума функции двух переменных?
2. Какая точка называется точкой минимума функции двух переменных?
3. Какие точки называются точками экстремума функции двух переменных?
4. Какие точки называются стационарными точками функции двух переменных?
5. Сформулировать необходимые условия экстремума.
6. Сформулировать достаточные условия экстремума.
7. Что называется условным экстремумом?
8. Как определить наибольшее и наименьшее значения функции на множестве D ?

Тема 42. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Поле направлений. Интегральные кривые.

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Какое дифференциальное уравнение называется обыкновенным?
3. Что называется порядком дифференциального уравнения?
4. Понятие интегральной кривой дифференциального уравнения.
5. Понятие семейства интегральных кривых.
6. Какое решение называется общим решением дифференциального уравнения?
7. Какое решение называется частным решением дифференциального уравнения?
8. Какая задача называется задачей Коши?
9. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
10. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

Тема 43. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, уравнения в полных дифференциалах.

1. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?
2. Решение задачи Коши для уравнения с разделяющимися переменными.
3. Какое дифференциальное уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка?
4. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли?
5. Метод решения уравнения Бернулли.
6. Какое дифференциальное уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка?
7. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением в полных дифференциалах?
8. Решение задачи Коши для уравнения в полных дифференциалах.

Тема 44. Дифференциальные уравнения высших порядков, понятия решения общего и частного. Задача Коши, геометрический смысл. Уравнения, допускающие понижение порядка. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

1. Какое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением n -го порядка.
2. Какие решения называются общим и частным решением дифференциального уравнения n -го порядка?
3. Задача Коши для дифференциальных уравнений n -го порядка.
4. Теорема существования и единственности задачи Коши.
5. Метод понижения порядка.
6. Типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

Тема 45. Линейно-зависимые и линейно-независимые функции. Определитель Вронского. Условия линейной зависимости и независимости системы функций на отрезке.

1. Какие функции называются линейно-зависимыми?
2. Какие функции называются линейно-независимыми?
3. Определитель Вронского и его свойства.
4. Теоремы для определения линейно-зависимых и линейно-независимых функций.

Тема 46. Линейные однородные дифференциальные уравнения n -го порядка. Структура общего решения.

1. Понятие линейного однородного и неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка.
2. Общий вид линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка
3. Что определяет фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка?
4. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
5. Структура общего решения линейных однородных дифференциальных уравнений n -го порядка.

Тема 47. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1. Общий вид линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Какое уравнение называется характеристическим уравнением?
3. Нахождение общего решения характеристического уравнения.
4. Зависимость вида общего решения заданного дифференциального уравнения от значений корней характеристического уравнения.
5. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами.

Тема 48. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения.

1. Общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
2. Какое уравнение называется соответствующим однородным уравнением?
3. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Тема 49. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

1. В чем состоит метод Лагранжа?
2. Общее и частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
3. Теорема о наложении решений.

Тема 50. Метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений со специальной правой частью.

1. Общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.
2. Способы нахождения частного решения по "специальному виду" правой части.
3. Суть метода неопределенных коэффициентов.
4. Правила нахождения частного решения в зависимости от вида корней характеристического уравнения.

Тема 51. Системы дифференциальных уравнений. Общие понятия. Методы решения.

1. Что называется системой дифференциальных уравнений?
2. Какие системы называются каноническими?
3. Какая система называется нормальной системой дифференциальных уравнений?
4. Что является решением системы дифференциальных уравнений?
5. Что называется общим решением системы дифференциальных уравнений?
6. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений.
7. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.
8. Решение нормальных систем дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций.
9. Решение нормальных систем дифференциальных уравнений методом исключений.
10. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству собеседование (устный/письменный опрос)

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Ответ полный и правильный на основании изученного материала. Выдвинутые положения аргументированы и иллюстрированы примерами. Материал изложен в определенной логической последовательности, с использованием научных терминов; ответ самостоятельный. Обучающийся уверенно отвечает на дополнительные вопросы.
хорошо (4)	Ответ полный и правильный, подтвержден примерами; но их обоснование не аргументировано. Материал изложен в определенной логической последовательности, при этом допущены 2-3 несущественные погрешности, исправленные по требованию экзаменатора. Материал изложен осознанно, самостоятельно, с использованием научных терминов. Обучающийся испытывает незначительные трудности в ответах на дополнительные вопросы.
удовлетвори- тельно (3)	Ответ недостаточно логически выстроен, самостоятелен. Основные понятия употреблены правильно, но обнаруживается недостаточное раскрытие теоретического материала. Выдвигаемые положения недостаточно аргументированы и не подтверждены примерами; ответ носит преимущественно описательный характер. Научная терминология используется недостаточно. Обучающийся испытывает достаточные трудности в ответах на вопросы.
неудовлетвори- тельно (2)	Ответ недостаточно логически выстроен, самостоятелен. Основные понятия употреблены неправильно, обнаруживается недостаточное раскрытие теоретического материала. Выдвигаемые положения недостаточно аргументированы и не подтверждены примерами; Научная терминология используется недостаточно. Обучающийся испытывает достаточные трудности в ответах на вопросы.

Практические работы (первый семестр)

Тема 1: Операции над матрицами.

1. Найти значение многочлена

$$f(A) = A^3 - 7 \cdot A^2 + 13 \cdot A - 5 \cdot E, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Транспонировать матрицы:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить произведения матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -18 & 10 \\ 31 & -17 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти матрицу $A = (2B - 3C) \cdot D$, если

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Найти все матрицы, переставные с матрицами:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тема 2: Определители второго, третьего и n -го порядка и их вычисление.

1. Вычислить определитель второго порядка

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} \alpha & 3\alpha \\ \beta & 3\beta \end{vmatrix}.$$

2. Решить уравнение

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2x + 3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x & -2 & y + 3 \\ 1 & -y & x - 2 \end{vmatrix} = -4.$$

3. Вычислить определители разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & y & z \\ x & 0 & z \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определители четвертого порядка:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тема 3: Ранг матрицы. Обратная матрица.

1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матриц методом обводных миноров

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Исследовать зависимости от значения ранг матриц:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу к заданной матрице:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 4: Матричные уравнения.

7. Решить матричные уравнения:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тема 5: Теорема Кронекера - Капелли. Метод Гаусса.

1. Исследовать системы линейных алгебраических уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решение:

$$а) \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} 3x - y + 2z = 2, \\ 4x - 3y + 3z = 3, \\ x + 3y = 0, \\ 5x + 3z = 3. \end{cases}$$

2. Решить системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$а) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18, \\ -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Тема 6: Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и матричным методом.

Решить системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера и методом обратной матрицы:

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -7, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 13. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -11, \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

Тема 7: Решение однородных и неоднородных систем линейных алгебраических уравнений.

1. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$а) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

2. Исследовать системы линейных алгебраических уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решение:

$$а) \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} 3x - y + 2z = 2, \\ 4x - 3y + 3z = 3, \\ x + 3y = 0, \\ 5x + 3z = 3. \end{cases}$$

3. Найти фундаментальные системы решений однородных систем:

$$а) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Тема 8: Линейные операции над векторами. Разложение векторов.

1. Даны начало $A(-1; 2; 3)$ и конец $B(2; 6; -2)$ вектора $\overrightarrow{AB}$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину.

2. Даны векторы $\vec{a}(2, 3, -1)$ и $\vec{b}(1, -1, 2)$. Найти координаты и длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

3. Написать разложение вектора $\vec{x}\{-2, 4, 7\}$ по векторам $\vec{p}\{0; 1; 2\}$, $\vec{q}\{1; 0; 1\}$, $\vec{r}\{-1; 2; 4\}$.

4. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}$, разложенные по векторам $\vec{a}\{1; -2; 3\}$ и $\vec{b}\{3; 0; -1\}$?

5. На оси абсцисс найти точку, равноудаленную от точек $A(2; 3)$ и $B(5; 6)$.

6. Даны точки $A(2; 4)$, $B(6; -2)$ и $C(-5; 0)$. Найти координаты точки D , делящей отрезок BC в отношении $\frac{|AB|}{|AC|}$, где $|AB|$ - расстояние между точками A и B , а $|AC|$ - расстояние между точками A и C .

Тема 9: Скалярное произведение векторов.

1. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(1; 7; 2)$, $B(5; -3; 3)$, $C(12; -1; -5)$.

2. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

4. Даны векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

5. Даны вершины $A(0; 1; 2)$, $B(3; -1; 1)$ и $C(5; 0; 3)$ треугольника. Найти угол при вершине A .

6. Вычислить, какую работу совершает сила $\vec{F}\{2; -1; -4\}$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(1; -1; 3)$ в

положение $N(5; -6; 1)$.

7. Сила $\vec{F}\{4; -3; -7\}$ приложена к точке $A(1; 6; 5)$. Найти момент этой силы относительно начала координат.

Тема 10: Векторное произведение векторов.

1. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle \vec{a}, \vec{b} = 30^\circ$.

4. Вычислить площадь треугольника с вершинами: $A(1; 1; 3)$, $B(3; -1; 6)$, $C(5; 1; -3)$.

5. По заданным координатам $A(3; -1; 2)$; $B(1; 2; -1)$; $C(-1; 1; 3)$ вершин треугольника определить длины сторон, углы и площадь.

Тема 11: Смешанное произведение векторов.

1. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

2. Показать, что векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ компланарны.

3. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$ и $D(5; 5; 6)$.

4. Вычислить объем тетраэдра с вершинами $A_1(2; 3; 1)$, $A_2(4; 1; -2)$, $A_3(6; 3; 7)$ и $A_4(-5; -4; 8)$, и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

5. Даны координаты вершин пирамиды: $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$. Вычислить: 1) объем пирамиды; 2) длину ребра AB ; 3) площадь грани ABC .

Тема 12: Системы координат на плоскости. Уравнение прямой на плоскости. Прямая на плоскости.

1. Найти прямоугольные координаты точки, полярные координаты которой $A\left(-3, \frac{5\pi}{4}\right)$.

2. Найти уравнение геометрического места точек, расстояние каждой из которых от прямой $x = 3$ равно расстоянию от точки $(4; -2)$.

3. Найти точку пересечения прямых $3x - 2y + 10 = 0$ и $x + y + 5 = 0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через т. $M_0(1; -2)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}\{-3; 5\}$.

5. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $5x + 3y + 15 = 0$, $x + 4y - 7 = 0$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4; -5)$

параллельно (перпендикулярно) прямой $3x + 4y + 12 = 0$.

7. Дан треугольник с вершинами $A(2;-1)$, $B(6;-4)$, $C(10;3)$. Найти длину высоты, опущенной из точки C .

8. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x + 2y + 2 = 0$ и $x + y - 4 = 0$ и уравнение одной из диагоналей $x - 2 = 0$. Найти координаты вершин параллелограмма.

Тема 13: Кривые второго порядка: окружность, эллипс.

1. Уравнение окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ привести к каноническому виду.

2. Найти уравнение окружности, центр которой находится в точке $(3;-5)$ и радиус которой равен 4.

3. Найти уравнение окружности, диаметром которой является отрезок прямой $3x - 4y + 12 = 0$, содержащийся между осями координат.

4. Уравнение эллипса $2x^2 + 4x + 9y^2 + 18y = 0$, привести к каноническому виду.

5. Найти длины осей, эксцентриситет и координаты фокусов эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$.

5. Найти уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(\pm 4; 0)$, а длина большой оси равна 10.

7. Найти уравнение эллипса, если известно, что он проходит через точки $M_1(6;4)$ и $M_2(-8;3)$.

8. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки $A(3; 0)$ и до прямой $x = 12$ равно числу $\varepsilon = 0,5$. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить кривую.

Тема 14: Кривые второго порядка: гипербола, парабола.

1. Найти эксцентриситет, координаты фокусов и уравнения асимптот гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$.

2. Найти уравнение гиперболы, у которой фокусы имеют координаты $(\pm 4; 0)$ и действительная ось равна 6.

3. Найти уравнение равносторонней гиперболы, проходящей через точку $(3; -1)$.

4. Найти координаты вершины и фокуса и уравнения оси директрисы параболы $y^2 + 5y - 6x + 7 = 0$.

5. Найти уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(3; 2)$ и фокус в точке $(5; 2)$.

6. Составить уравнения линии, для каждой точки которой ее расстояние до точки $A(3;-4)$ равно расстоянию до прямой $y = 2$. Полученное уравнение привести к простейшему виду и построить кривую.

Тема: Общее уравнение линий второго порядка.

Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить:

- 1) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$.
- 2) $16y^2 - 9x^2 + 32y + 54x - 209 = 0$.
- 3) $y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$.
- 4) $3x^2 - 6x + y + 1 = 0$.
- 5) $x^2 - 2y^2 + 4y = 0$.
- 6) $x^2 - 4y^2 - 16y = 0$.

Тема 16: Плоскость и прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

1. Составить уравнение прямой, которая проходит через точки $A(3; -4)$ и $B(4; 5)$.

2. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $A(3; -4)$ параллельно прямой $2x + 5y - 7 = 0$, и перпендикулярно ей.

3. Уравнение плоскости $2x + 3y - 4z + 24 = 0$ преобразовать в формулу отрезков на осях.

4. Определить расстояние от точки $M(1; 2)$ до прямой $20x - 21y - 58 = 0$.

5. Найти расстояние от точки $A(2, 3, -1)$ до плоскости $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

6. Найти острый угол между плоскостями: $5x - 3y + 4z - 4 = 0$ и $3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 3; 4)$ и перпендикулярной прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$

Тема 17: Поверхности второго порядка.

1. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1, z = 0$ вокруг оси Ox .

2. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1, y = 0$ вокруг оси Oz .

3. Установить, что плоскость $x - 2 = 0$ пересекает эллипсоид $x^2/16 + y^2/12 + z^2/4 = 1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

4. Определить вид и составить каноническое уравнение поверхности, заданной относительно прямоугольной системы координат общим уравнением $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$.

5. Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $x^2/4 + x^2/9 - z^2/16 = 1$, параллельных плоскости $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

6. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого дана уравнениями $x^2 - 2z + 1 = 0, y - z + 1 = 0$.

7. Составить уравнение цилиндра, направляющая которого дана уравнениями $x^2 - y^2 = z, x + y + z = 0$, а образующие перпендикулярны к плоскости направляющей.

Практические работы (второй семестр)

Тема 18: Способы задания функций. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

1. Построить графики функций с помощью элементарных преобразований:

а) $y = x^2 - 10x + 21$;

б) $y = 3\cos 2x$.

2. Исследовать на четность функции:

а) $y = \sin 4x - 3x$;

б) $y = xe^{2x}$;

в) $y = x^6 + 2x^2 - 8$.

3. Записать в явном виде неявно заданные функции:

а) $x^2 + y^2 = 1$;

б) $xy = a$;

в) $2^{xy} = 5$;

г) $\ln x + \ln(y+1) = 4$;

4. Найти область определения функций:

а) $y = \sqrt{5-2x}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$;

в) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$;

г) $y = \arcsin \frac{x}{4}$;

5. Определить период функции:

а) $y = \sin 3x$;

б) $y = 5\cos 2x$;

6. Определить промежутки знакопостоянства функций:

1) $y = x^2 - 5x + 6$;

2) $y = 2^{x-1}$;

3) $y = |x-1| - 2$.

Тема 19: Предел переменной величины. Свойства пределов.

1. Доказать, используя определение предела, что:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3 + 1} = 0$.

2. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}$;

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 1}$;

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$;

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$.

Тема 20: Предел функции. Основные теоремы о пределах.

Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x + 1}{5x^2 + x - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x} \right);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 6};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1-x} - 1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 3x + 1} \right);$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{2x^2 - 3x - 2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - x^2}}{2x^2};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 4x + 1}{3x^2 - 5};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x + 1});$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2+x}}{x};$$

Тема 21: Замечательные пределы.

Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x \sin x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{2-x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(\sin x + \sin 3x)^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+3}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\cos 2x - \cos 4x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4} \right)^{x+2}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos 6x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+3x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2x}}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x - \sin x};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x-1} \right)^{3x+4}.$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{\sin 4x^2};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5+x}{4+x} \right)^{3x+1}.$$

Тема 22: Вычисление производных основных элементарных функций. Правила дифференцирования функций. Производная сложной функции. Уравнения касательной и нормали.

1. Вычислить производные:

$$1) y = \sqrt{2x^2 + 4} \cdot \sin 3x;$$

$$2) y = (\ln(4x - 1) + 2x^2)^2;$$

$$3) y = \frac{7x^2 + \cos^2 x}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$4) y = e^{x \arcsin x};$$

$$5) y = \cos^3 4x + \cos 4x^3;$$

$$6) y = \sqrt{\frac{5x^3 + 4x^2 - 3}{\arccos 5x}};$$

$$7) y = \frac{e^{\sin x}}{4x^2 - 1};$$

$$8) y = (\ln \operatorname{tg} x - 3x)^3.$$

2. Составить уравнения нормали к линии $f(x) = x^3$ в точке $M_0(2; 8)$.

3. Составить уравнения касательной к линии $y = \frac{8}{4 + x^2}$ в точке $x = 2$.

4. Вычислить производные функций, используя логарифмическое дифференцирование:

$$1) y = \sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

$$2) y = x^3 e^{x^2} \sin 2x;$$

$$3) y = \frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3};$$

$$4) y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}.$$

Тема 23: Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций. Производные высших порядков.

1. Вычислить производные функций, заданных неявно:

$$1) 2y \ln y = x;$$

$$2) x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}};$$

$$3) x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

$$4) y^2 \cos x = a^2 \sin 3x;$$

$$5) y = \cos(x + y).$$

$$6) 2^x + 2^y = 2^{x+y}.$$

2. Вычислить производные функций, заданных параметрически:

$$1) \begin{cases} y = t - t^3; \\ x = 1 - t^2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = e^t \cos t; \\ x = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y = t - \operatorname{arctg} t; \\ x = \ln(1 + t^2). \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y = \frac{t-1}{t}; \\ x = \frac{t+1}{t}. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y = \frac{t}{t^2 - 1}; \\ x = \frac{1 + t^2}{t^2 - 1}. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} y = \frac{3at^2}{1 + t^3}; \\ x = \frac{3at}{1 + t^3}. \end{cases}$$

3. Вычислить производные второго порядка заданных функций:

$$1) y = \operatorname{arctg}(e^{-x^2}); \quad 2) x + y + 1 = \ln(1 + x - y); \quad 3) \begin{cases} y = \cos t; \\ x = \sin(1 + t^2). \end{cases}$$

Тема 24: Дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

1. Найти дифференциалы функций:

$$\begin{aligned} 1) y &= (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x}); & 2) y &= \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}; \\ 3) y &= 3 - \frac{1}{x^2} + 3x^3 - 4\sqrt{x}; & 4) y &= (1 + x - x^2)^3; \\ 5) y &= 2 - \frac{1}{\cos x}; & 6) y &= \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right). \end{aligned}$$

2. Вычислить приблизительно значение:

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{arctg} 1,02; & \quad 2) \lg 12; & \quad 3) \cos 63^\circ \\ 4) \arcsin 0,4836. & \quad 5) \sqrt[3]{68}; & \quad 6) \sqrt[5]{240} \end{aligned}$$

3. Вычислить приблизительно значение функции: $f(x) = \sqrt[3]{1 + 7x^2}$ при $x = 1,1$.

4. Найти дифференциалы второго порядка функций:

$$\begin{aligned} 1) y &= \frac{\cos x}{1 - x^2}. & 2) y &= \sqrt{\arcsin x} + (\operatorname{arctg} x)^2. \\ 3) y &= 5^{\ln \operatorname{tg} x}; & 4) y &= \operatorname{tg}^2 x \end{aligned}$$

Тема 25: Применение производных к исследованию поведения функций.

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\begin{aligned} 1) y &= x - 2\sin x, & [0, \pi]; & \quad 2) y = x - 3\ln x, & [2, 4]; \\ 3) y &= x + \frac{2}{\sqrt{x}}, & \left[\frac{1}{4}, 4\right]; & \quad 4) y = \sqrt{169 - x^2}, & [-12, 5]; \\ 5) y &= \frac{\ln x}{x}, & [2, 4]; & \quad 6) y = \frac{1}{x} + 4x^2, & \left[\frac{1}{2}, 2\right]; \\ 7) y &= \frac{x^3 - 2}{x}, & \left[-2, -\frac{1}{2}\right]; & \quad 8) y = \ln \cos x, & \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]; \\ 9) y &= x^2 e^{-x}, & [1, 3]; & \quad 10) y = x^2 - \ln x, & [1, 3]. \end{aligned}$$

Тема 26: Исследование функций и построение графиков.

31–40. Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график.

$$1) y = \frac{x}{x^2 - 4}; \quad 2) y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2};$$

$$3) y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}; \quad 4) y = \frac{1 - 5x^4}{2x^5};$$

$$5) y = \frac{x^4 + 1}{x^2}; \quad 6) y = \frac{4x^3 + 1}{x^4};$$

$$7) y = \frac{x^3}{3 - x^2}; \quad 8) y = \frac{3x + 2}{x^3};$$

$$9) y = \frac{8 + 4x^3}{x}; \quad 10) y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

Тема 27: Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.

Простейшие методы интегрирования. Метод подстановки.

1. Найти интегралы, используя преобразование

$$\int f(ax + b)dx = \frac{a}{a} \int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b)d(ax + b):$$

$$1) \int (x + 8)^{10} dx; \quad 2) \int \cos \frac{x+3}{3} dx; \quad 3) \int e^{\frac{x}{2}} dx;$$

$$4) \int 2^{5x+4} dx; \quad 5) \int \frac{dx}{3-2x}; \quad 6) \int \frac{dx}{(5x+2)^2}.$$

2. Найти интегралы, используя простейшие методы интегрирования:

$$1) \int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad 2) \int \frac{x + \ln(x-2)}{x-2} dx;$$

$$3) \int \frac{\sin^2 x + \cos x}{\sin x} dx; \quad 4) \int \frac{\sqrt{x^2-1} + \operatorname{tg} \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} dx.$$

3. Найти интегралы, выделив полные квадраты в квадратных трехчленах:

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}; \quad 2) \int \frac{dx}{x^2 + 2x};$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}; \quad 4) \int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx.$$

4. Методом подстановки найти интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}; \quad 2) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad 3) \int \frac{dx}{e^x + 1};$$

$$4) \int \frac{\ln x dx}{x(1 - \ln^2 x)}; \quad 5) \int x(2x+5)^{10} dx; \quad 6) \int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

Тема 28: Интегрирование по частям.

1. Интегрируя по частям найти интегралы:

- 1) $\int x \cdot 2^{-\frac{x}{3}} dx$; 2) $\int x e^{-\frac{x}{2}} dx$; 3) $\int \operatorname{arccotg} x dx$;
4) $\int (x+1) \cos 3x dx$; 5) $\int (2-x) e^x dx$; 6) $\int x \ln(1-x) dx$;
7) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$; 8) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$; 9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

2. Используя комбинацию методов, найти интегралы:

- 1) $\int e^{-x^2} x^5 dx$; 2) $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$; 3) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$.

Тема 29: Интегрирование рациональных дробей.

Найти интегралы от рациональных функций:

- 1) $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$; 2) $\int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}$;
3) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$; 4) $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$;
5) $\int \frac{x dx}{x^4 - 3x^2 + 2}$; 6) $\int \frac{x^4 dx}{(x+2)(x^2-1)}$;
7) $\int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx$; 8) $\int \frac{x^3 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx$;
9) $\int \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x}$; 10) $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$;
11) $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)}$; 12) $\int \frac{(x^2+1) dx}{(x-1)^3}$.

Тема 30: Интегрирование тригонометрических дифференциалов, универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

1. Найти интегралы от тригонометрических функций:

- 1) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; 2) $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$; 3) $\int \sin^5 x dx$;
4) $\int (1 - \sin 2x)^2 dx$; 5) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$; 6) $\int \sin 5x \sin 6x dx$;
7) $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$; 8) $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$; 9) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

2. С помощью тригонометрических подстановок найти интегралы:

$$1) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 2) \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx; \quad 3) \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

3. Избавляясь от иррациональности подстановкой типа $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, найти интегралы:

$$1) \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx; \quad 2) \int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx; \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$$

4. Найти интегралы от дифференциальных биномов:

$$1) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx; \quad 2) \int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx; \quad 3) \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx.$$

Тема 31: Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов. Приближенное вычисление определенных интегралов.

1. Используя метод подстановки, вычислить интегралы:

$$1) \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}; \quad 2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx;$$

$$5) \int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}; \quad 6) \int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}.$$

2. Интегрируя по частям

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx; \quad 2) \int_1^{e-1} \ln(x+1) dx;$$

$$3) \int_1^e x^2 \ln x dx; \quad 4) \int_0^1 x^3 e^{2x} dx$$

2. Используя различные методы интегрирования, вычислить интегралы:

$$1) \int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x} dx \quad 2) \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$$

3. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ с точностью до 10^{-4} .

Тема 32: Несобственные интегралы с бесконечными пределами (1-го рода) и от неограниченных функций (2-го рода), их основные свойства.

1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\begin{array}{ll}
1) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; & 2) \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg}^2 x}; \\
3) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}; & 4) \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(3x+1)^2}; \\
5.) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}; & 6) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.
\end{array}$$

2. Вычислить интегралы и установить их сходимость:

$$\begin{array}{ll}
1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}; & 2) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}; \\
3) \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}; & 4) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx; \\
5) \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4+1}}; & 6) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.
\end{array}$$

Тема 33: Приложения определенного интеграла к задачам геометрии, механики, физики.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = (x-2)^3, y = 4x - 8.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнением в полярной системе координат: $r = 4 \sin 3\varphi, r = 2 (r \geq 2)$.

3. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3$

4. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + 4y^2, z = 2$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиком функции: $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0$.

7. Цилиндр высотой $H = 0,4 \text{ м}$ и радиусом $R = 0,1 \text{ м}$ наполнен газом под атмосферным давлением $103,3 \text{ кПа}$. Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изометрическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на $h = 0,35 \text{ м}$.

8. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобокой трапеции со сторонами основания $a = 4,5 \text{ м}, b = 6,6 \text{ м}$ и высотой $h = 3,0 \text{ м}$. Плотность воды, $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения положить

равным $g = 10 \frac{м}{с^2}$.

Тема 34: Функции нескольких переменных. Область определения. Геометрическое изображение функции двух переменных. Предел, непрерывность функции нескольких переменных.

Найти область значения следующих функций:

- 1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; 2) $z = \ln(x^2 + y)$;
3) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 - 4}$; 4) $z = \arccos x + \arcsin y$.

Найти пределы функций:

- 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$; 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
4) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$; 5) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$; 6) $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$.

Найти точки разрыва функций:

- 1) $z = \frac{1}{(x - y)^2}$; 2) $z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$; 3) $z = \sin \frac{1}{xy}$;
4) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; 5) $z = \frac{1}{1 - e^{xy}}$; 6) $z = \frac{x}{x^4 - y^4}$.

Тема 35: Частные производные функции нескольких переменных, их геометрический смысл. Полный дифференциал. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Дифференцирование функций, заданных неявно. Дифференцирование сложной функции.

1. Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

- 1) $z = x^2 + y^3 - 2axy$; 2) $z = x^2 y^3 - \sqrt{x + y}$;
3) $z = \frac{x + y}{x + y + 1}$; 4) $z = (x + y)\sqrt{x - y}$;
5) $z = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$; 6) $z = \ln(2x^2 - y^2)$.

2. Вычислить частные производные функций:

- 1) $z = \ln \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в точке $(1; 1)$;
2) $z = x^2 y^3 + \sqrt{x^2 y}$ в точке $(-1; 1)$.

3. Найти полные дифференциалы указанных функций:

- 1) $z = 2x^3 y - 4xy^5$; 2) $z = x^2 y \sin x - 3y$; 3) $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$;

$$4) z = \operatorname{arctg} x + \sqrt{y}; \quad 5) z = 5xy^4 + 2x^2y^7; \quad 6) z = \ln(3x^2 - 2y^2).$$

4. Найти приближенно:

$$1) 0,97^{1,05}; \quad 2) \sqrt{5e^{0,02} + (2,03)^2}; \quad 3) \sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ; \quad 4) \ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1).$$

Найти дифференциал второго порядка указанных функций:

$$\begin{aligned} 1) z &= xy^2 - x^2y; & 2) z &= \ln(x - y); & 5) z &= e^{xy}; \\ 3) z &= \frac{1}{2(x^2 + y^2)}; & 4) z &= x \sin^2 y; & 6) z &= x \ln \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Тема 36: Экстремумы функции двух переменных, необходимые и достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум. Наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области.

1. Найти экстремум функций:

$$\begin{aligned} 1) z &= x^2 + (y - 1)^2; & 2) z &= x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2; \\ 3) z &= 1 - \sqrt{x^2 + y^2}; & 4) z &= e^{x-y}(x^2 - 2y^2); \\ 5) z &= xy \ln(x^2 + y^2); & 6) z &= \sin x + \cos y + \cos(x - y) \left(\{x; y\} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right). \end{aligned}$$

2. Найти условный экстремум функций:

$$\begin{aligned} 1) z &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ при } x + y = 2; \\ 2) z &= x + y \text{ при } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}; \\ 3) z &= xy \text{ при } x + y = 1; \\ 4) z &= x^2 + 12xy + 2y^2 \text{ при } 4x^2 + y^2 = 25. \end{aligned}$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области D , ограниченной заданными линиями.

$$\begin{aligned} 1) z &= 3x + y - xy, \quad D: y = x, \quad y = 4, \quad x = 4, \quad x = 0; \\ 2) z &= xy - x - 2y, \quad D: x = 3, \quad y = x, \quad y = 0; \\ 3) z &= x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2; \\ 4) z &= 5x^2 - 3xy + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1; \\ 5) z &= x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad D: x - y + 1 = 0, \quad x = 3, \quad y = 0; \\ 6) z &= x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Тема 37: Дифференциальные уравнения первого порядка.

1. Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} 1) y' + 2y &= 4x; & 2) y' - \operatorname{ctg} x \cdot y &= \sin x; \\ 3) xy' - 2y &= 2x^4; & 4) (x^2 + 1)y' + 4xy &= 3; \\ 5) y' - y &= e^x; & 6) xy' - y &= x. \end{aligned}$$

2. Найти частное решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям:

- 1) $xy' = 1 + y^2$, $y = 0$ при $x = 1$; 2) $y' = 2x + 2xy$, $y = 0$ при $x = 1$;
 3) $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $y = 1$ при $x = 0$; 4) $(1 + x^2)y' = 2xy$, $y = 2$ при $x = 0$;
 5) $y' \operatorname{tg} x = y$, $y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$; 6) $y' = 2\sqrt{y} \ln x$, $y = 1$ при $x = e$.

3. Решить задачу Коши:

- 1) $2y'\sqrt{x} = y$, $y(4) = 1$; 2) $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x$, $y(\pi/4) = 1/2$.

Тема 38: Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернуллы, уравнения в полных дифференциалах.

1. Найти общее решение или общий интеграл дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

- 1) $xydx + (x + 1)dy = 0$; 2) $(y^2 + 1)dx - xydy = 0$;
 3) $(x + 1)dy - (y - 2)dx = 0$; 4) $(1 + y^2)dx - (1 + x^2)dy = 0$;
 5) $\sqrt{1 - y^2}dx - \sqrt{1 - x^2}dy = 0$; 6) $(1 + y)dx + (1 + x)dy = 0$;

2. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка:

- 1) $y' = \frac{x + y}{x}$; 2) $y' = \frac{2y}{x}$; 3) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$;
 4) $y' = \frac{2yx + y^2}{x^2}$; 5) $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$; 6) $y' = \frac{y}{x} + \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$.

3. Найти общее решение уравнений Бернуллы:

- 1) $x^2y^2 \cdot y' + xy^3 = 1$; 2) $y' + \frac{1}{x}y = -xy^2$;
 3) $xy' - y^2 \cdot \ln x + y = 0$; 4) $y' - \frac{1}{2}y - y^2 = 0$;

4. Найти общее решение дифференциальных уравнений в полных дифференциалах:

- 1) $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$; 2) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$;
 3) $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx + (y^2 - 3x^2y)dy$; 4) $(xdx + ydy)(x^2 + y^2) = xdy - ydx$;
 5) $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$; 6) $(4x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

5. Решить задачу Коши:

- 1) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$, $y(0) = -1$; 2) $3y^2y' + y^3 = x + 1$, $y(1) = -1$.

Тема 39: Дифференциальные уравнения высших порядков, понятия решения общего и частного. Уравнения, допускающие понижение порядка.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка:

$$1) y'' \cdot \operatorname{tg} x = y' + 1; \quad 2) 2y \cdot y'' - (y')^2 = 0;$$

$$3) x(y'' + 1) + y' = 0; \quad 4) xy'' - y' = x^2 e^x.$$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

$$1) (1 - x^2) \cdot y'' - xy' = 2; \quad 2) y'' x \ln x = y';$$

$$3) y'' \operatorname{tg} x = y' + 1; \quad 3); \quad 4) y''(1 + y) = 5(y')^2.$$

3. Найти частное решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям:

$$1) y'' = \cos x; \text{ при } x = 0, y = 0, y' = 0;$$

$$2) y''' = 6x; \text{ при } x = 0, y = 1, y' = 0, y'' = 0;$$

$$3) y'' = 4e^{2x}; y = 1, y' = 2 \text{ при } x = 0;$$

$$4) y'' - y + 2y^3 = 0; y = 1, y = 0 \text{ при } x = 0.$$

4. Решить задачу Коши:

$$1) y'' = xe^x, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' = y' \ln y', y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Тема 40: Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.

1. Исследовать на линейную зависимость группы функций:

$$1) \ln x; x; \quad 2) \sin x; \cos x;$$

$$3) x^2 + 3x; x^2 - 1; x + 3; \quad 4) \ln x^4; \ln 5x; 11.$$

2. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$$1) y'' = x^2. \quad 2) y'' = \sin x$$

$$3) xy'' + y' = (y')^2 \quad 4) y'' = (y')^2$$

Решить линейные однородные дифференциальные уравнения, если известно одно из частных решений:

$$1) y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0; y_1(x) = \frac{1}{x};$$

$$2) (y'' + (2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)y' + 2y \operatorname{tg}^2 x = 0; y_1(x) = \cos^2 x;$$

$$3) x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = 0; y_1(x) = x;$$

$$4) y'' - \frac{2y}{x^2} = 0; y_1(x) = \frac{1}{x};$$

$$5) (x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + 2(x - 1)y = 0; y_1(x) = x^2;$$

$$6) xy'' + 2y' + x = 0; y_1(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Тема 41: Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1. Найти общее решение уравнений:

1) $y'' - y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 3y = 0$;

3) $y'' - y' - 2y = 0$; 4) $y'' - 4y = 0$;

5) $y'' + 8y' + 16y = 0$.; 6) $y'' + y' - y = 0$.

2. Найти частное решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям:

1) $y'' + y = 0$; $y' = 1$, $y = 0$ при $x = 0$;

2) $y'' - 2y' + y = 0$; $y' = 1$, $y = 0$ при $x = 0$.

3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$$1) \ y''' + 9y' = 0; \quad 2) \ y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0;$$

$$3) \ y^{(IV)} = 8y'' - 16y; \quad 4) \ y''' - 13y' - 12y = 0.$$

Тема 42: Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. Найти общее решение уравнений:

$$1) \ y'' + 4y = 8x^2; \qquad 2) \ y'' - y = 2x - x^2;$$

3) $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 4x + 2$; 4) $y'' + y' = e^x(2x + 3)$;

5) $y'' + 2y = 2 \cos x$; 6) $y'' - y = 2 \cos x + 2 \sin x$.

2. Найти частное решение линейных дифференциальных уравнений:

1) $y'' + y = x^3 + x + 3$; 2) $y'' + y' + y = 2x - 1$;

3) $y'' - y = 2 - x^2 - 2x$; 4) $y'' + y' = 3x^2 - 6$;

5) $y'' - 2y' = -2x + 2$; 6) $y'' = x^2$.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

1) $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}; y(0) = 1; y'(0) = 1.$

2) $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x; y(0) = -1, y'(0) = 1.$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных:

$$1) \ y'' + y = \operatorname{ctg}^2 x \qquad 2) \ y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x}$$

Тема 43: Системы дифференциальных уравнений. Методы решения.

1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$1) \begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$$

2. Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным.

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y; \end{cases} & 2) \begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y; \end{cases} \\
 x(0) = 2, \quad y(0) = 1. & x(0) = 1, \quad y(0) = 3. \\
 3) \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y; \end{cases} & 4) \begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y; \end{cases} \\
 x(0) = 2, \quad y(0) = 3. & x(0) = 1, \quad y(0) = 2.
 \end{array}$$

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству практическая работа

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент правильно выполнил задание. Показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на все дополнительные вопросы на защите.
хорошо (4)	Студент выполнил задание с небольшими неточностями. Показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов на защите.
удовлетворительно (3)	Студент выполнил задание с существенными неточностями. Показал удовлетворительное владение навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено много неточностей.
неудовлетворительно (2)	При выполнении задания студент продемонстрировал недостаточный уровень владения умениями и навыками при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено множество неточностей.

Индивидуальные задания (первый семестр)

Тема 1. Матрицы и определители

Задание 1. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^3 + 3x - 2$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Вычислить определитель 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$

Задание 3. Вычислить определитель высшего порядка: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

Задание 4. Привести матрицу к ступенчатому виду и вычислить ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$

Тема 2. Системы линейных уравнений

Задание 1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом Гаусса.

$$1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Задание 2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$1) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Тема 3. Векторная алгебра.

Задание 1. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \perp \vec{b}$.

Задание 2. Определить угол между векторами $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и

$$\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Задание 3. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Задание 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

Задание 5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle \vec{a}, \vec{b} = 30^\circ$.

Задание 6. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

Задание 7. Показать, что векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ компланарны.

Задание 8. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(1, 7, 2)$, $B(5, -3, 3)$, $C(12, -1, -5)$.

Задание 9. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ перпендикулярны.

Задание 10. Вычислить работу, произведенную силой $F = (8, 4, -6)$ при перемещении ее точки приложения с начала в конец вектора $s = (5, -3, 2)$.

Тема 4. Аналитическая геометрия.

Задание 1. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(5;3)$, $B(2;1)$, $C(3;-5)$. Не находя координаты вершины D , найти:

- 1) уравнение стороны AD ;
- 2) уравнение высоты BK , опущенной из вершины B на сторону AD ;
- 3) длину высоты BK ;
- 4) уравнение диагонали BD ;
- 5) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Задание 2. Даны точки $A(2;-3;-2)$, $B(-1;3;0)$, $C(-2;0;1)$, $D(4;-1;3)$. Найти:

- 1) общее уравнение плоскости ABC ;
- 2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC ;
- 3) расстояние от точки D до плоскости ABC ;
- 4) канонические уравнения прямой AD ;
- 5) канонические уравнения прямой, проходящей через точку B параллельно прямой AD ;
- 6) синус угла между плоскостью ABC и прямой AD .

Задание 3. Уравнение кривой второго порядка $9x^2 - 4y^2 - 36x - 4y - 1 = 0$ путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

Задание 4. Кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \frac{1}{2}\varphi$.

Требуется:

- 1) найти точки, лежащие на кривой, давая φ значения через промежуток, равный $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$;
- 2) построить полученные точки;
- 3) построить кривую, соединив построенные точки (от руки или с помощью лекала);
- 4) составить уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

Задание 5. Построить на плоскости геометрическое место точек, определяемое неравенствами

$$1) \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -x \leq y \leq 0 \end{cases}; \quad 2) 0 \leq x \leq \sqrt{9 - (y+1)^2}.$$

Индивидуальные задания (второй семестр)

Тема 5: Введение в математический анализ.

Задание 1. Вычислить пределы функций.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{x^2 + 2} - x^2 \right); & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 6x - 7}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{x^2 - 49}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}; \\ \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 5x) \cdot \operatorname{ctg}^2 3x; & \text{е) } \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 5)^{\frac{2x}{x^2 - 4}}. \end{array}$$

Задание 2. Дана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x .

Требуется:

- 1) Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x ;
- 2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x ;
- 3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2 .

$$y = \frac{x^2}{x-2}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1.$$

Задание 3. Для кусочно-заданной функции $y = f(x)$.

Требуется:

- 1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
- 2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
- 3) Сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} -x-1, & \text{если } x < 0, \\ (x+5)^2, & \text{если } 0 \leq x < 3, \\ 1-x, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

Тема 6. Производная и дифференциал.

Задание 1. Найти производные

$$1) y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3,$$

$$2) y = \sin x \cdot \operatorname{arctg} x,$$

$$3) y = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}},$$

$$4) y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + 1}},$$

$$5) y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x,$$

$$6) y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}},$$

$$7) y = (1 + \ln \sin x)^2,$$

$$8) y = 2^{\frac{1}{\ln x}},$$

$$9) y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x},$$

$$10) y = e^{\sin x}.$$

Задание 2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

$$1) x^3 + \operatorname{arctg}(e^y) + y(x-1) = 0,$$

$$2) \sin y = x + 3y,$$

$$3) \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

Задание 3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$y = x \cos 2x$$

Задание 4. Найти дифференциал функции:

$$y = \ln \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$$

Задание 5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 - x + 1$ в точке с абсциссой $x = -1$.

Тема 7. Исследование функций.

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = x^2 e^{-x} + \sqrt{3}; [-1; 4]$$

Задание 2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Тема 8. Интегральное исчисление функции одной переменной.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$1) \int \left(\sqrt{x} - 2x^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx;$$

$$2) \int (1 - \sin 2x)^5 \cos 2x dx;$$

$$3) \int \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} dx;$$

$$4) \int 2^{-x^3} x^2 dx;$$

$$5) \int (e^x + 1)^2 dx;$$

$$6) \int e^x \sin e^x dx;$$

$$7) \int (\sin^2 x + 1) x dx;$$

$$8) \int \frac{x + 4}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx;$$

$$9) \int \sin 5x \cdot \cos 8x dx;$$

$$10) \int (e^x - 3)^2 dx.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$а) \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}};$$

$$б) \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}}.$$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$ и $y = 0$;

б) площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox параболы $y^2 = 2x + 1$ от $x_1 = 1$ до $x_2 = 7$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Тема 9. Функции нескольких переменных.

Задание 1. Найти градиент и уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 5x - 7z + 18 = 0$, в точке $M_0(1, -1, 2)$.

Задание 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - 3x$; в области D , ограниченной заданными линиями: $y + 2x = 6$, $y = 0$, $x = 0$.

Задание 3. Найти полный дифференциал функции $z = xy \cdot e^{5x^2}$.

Задание 4. Найти частные производные второго порядка функций:

$$а) z = \ln(3x^2 - 2y^2);$$

$$б) z = \arcsin(x - y)$$

Задание 5. Вычислить значение производной сложной функции

$$u = u(x, y) = \arccos \frac{x^2}{y}, \text{ где } x = x(t) = 1 + \ln t, \quad y = y(t) = -2e^{-t^2 + 1}, \text{ при } t = t_0 = 1 \text{ с}$$

точностью до двух знаков после запятой.

Тема 10. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Задание 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$$а) xy' + y = 5;$$

$$б) y' - y(1 + x) = x;$$

$$в) y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y};$$

$$г) x(y' - y) = e^x.$$

Задание 2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 4y + x \end{cases}$$

Задание 3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.

Задание 4. Найти общее решение дифференциального уравнения $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y' = \sin^2 x$.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству индивидуальное задание

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент правильно выполнил задание. Показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на все дополнительные вопросы на защите.
хорошо (4)	Студент выполнил задание с небольшими неточностями. Показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов на защите.
удовлетворительно (3)	Студент выполнил задание с существенными неточностями. Показал удовлетворительное владение навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено много неточностей.
неудовлетворительно (2)	При выполнении задания студент продемонстрировал недостаточный уровень владения умениями и навыками при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено множество неточностей.

Оценочные средства для промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену (первый семестр)

1. Матрица, порядок матрицы.
2. Виды матриц.
3. Транспонирование матриц.
4. Сложение и вычитание матриц.
5. Умножение матриц на число.
6. Произведение матриц.
7. Элементарные преобразования матриц.
8. Эквивалентные матрицы.
9. Определители матриц. Вычисление определителей 2-го порядка.
10. Вычисление определителей 3-го порядка.
11. Вычисление определителей 4-го и более порядка.
12. Разложение определителя по элементам некоторого ряда.
13. Свойства определителей.
14. Миноры определителей n -го порядка.
15. Алгебраические дополнения определителей n -го порядка.
16. Ранг матрицы.
17. Свойства ранга матрицы.
18. Вырожденные и невырожденные матрицы.
19. Обратная матрица.
20. Свойства обратной матрицы.
21. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
22. Матричные уравнения. Решение матричных уравнений.
23. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
24. Правило решения произвольной системы линейных уравнений.
25. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.
26. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Матричный метод.
27. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера.
28. Системы однородных линейных уравнений. Необходимость и достаточность существования ненулевых решений системы однородных линейных уравнений.
29. Векторы.
30. Линейные операции над векторами.
31. Проекция вектора на ось.
32. Свойства проекций.
33. Разложение вектора по ортам.
34. Модуль вектора.
35. Направляющие косинусы.
36. Линейные операции над векторами.
37. Равенство векторов.
38. Коллинеарность векторов.
39. Координаты точки.

40. Координаты вектора.
41. Скалярное произведение векторов.
42. Свойства скалярного произведения.
43. Выражение скалярного произведения через координаты.
44. Угол между векторами.
45. Условие перпендикулярности векторов.
46. Проекция вектора на заданное направление. Работа постоянной силы.
47. Векторное произведение векторов и его свойства.
48. Выражение векторного произведения через координаты.
49. Векторное произведение векторов
50. Условие коллинеарности векторов.
51. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.
52. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл и свойства.
53. Выражение смешанного произведения через координаты.
54. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.
55. Компланарность векторов.
56. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды.
57. Основные понятия системы координат на плоскости.
58. Расстояние между двумя точками.
59. Деление отрезка в данном отношении и пополам.
60. Площадь треугольника.
61. Преобразование системы координат: параллельный перенос осей координат. Поворот осей координат.
62. Прямая на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
63. Прямая на плоскости. Общее уравнение прямой.
64. Прямая на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
65. Прямая на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
66. Прямая на плоскости. Уравнение прямой в отрезках.
67. Прямая на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
68. Прямая на плоскости. Полярное уравнение прямой.
69. Прямая на плоскости. Нормальное уравнение прямой.
70. Прямая линия на плоскости. Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
71. Расстояние от точки до прямой.
72. Линии второго порядка на плоскости. Окружность.
73. Линии второго порядка на плоскости. Эллипс: определение эллипса, фокусы, вершины, оси, полуоси, эксцентриситет, директрисы эллипса, каноническое уравнение эллипса.
74. Исследование формы эллипса по его уравнению.
75. Линии второго порядка на плоскости. Гипербола: определение гиперболы, фокусы, вершины, центр, действительные и мнимые оси и полуоси, эксцентриситет, фокальные радиусы, директрисы, асимптоты гиперболы, основной прямоугольник гиперболы каноническое уравнение гиперболы.
76. Уравнение равносторонней гиперболы, асимптотами которой служат

оси координат.

77. Сопряженные гиперболы.
78. Исследование формы гиперболы по ее уравнению.
79. Линии второго порядка на плоскости. Парабола: определение параболы, фокус, директриса, параметр параболы, каноническое уравнение параболы.
80. Исследование форм параболы по ее уравнению.
81. Вершина параболы, фокальный радиус точки.
82. Уравнение кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям. Единое уравнение для окружности, эллипса, гиперболы и параболы.
83. Общее уравнение второго порядка.
84. Уравнение поверхности. Текущие координаты точек поверхности.
85. Уравнение сферы.
86. Уравнения линии в пространстве.
87. Уравнения плоскости в пространстве.
88. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
89. Уравнения плоскости в пространстве.
90. Общее уравнение плоскости.
91. Уравнения плоскости в пространстве.
92. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
93. Уравнение плоскости в отрезках.
94. Нормальное уравнение плоскости.
95. Угол между двумя плоскостями.
96. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
97. Расстояние от точки до плоскости.
98. Уравнения прямой в пространстве: векторное уравнение прямой, параметрические уравнения прямой, канонические уравнения прямой, уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки, общие уравнения прямой.
99. Прямая линия в пространстве. Угол между прямыми.
100. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
101. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости.
102. Прямая и плоскость в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.
103. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
104. Прямая и плоскость в пространстве. Пересечение прямой с плоскостью.
105. Условие принадлежности прямой плоскости.
106. Цилиндрические поверхности. Направляющая и образующая цилиндра.
107. Эллиптический, круговой, параболический и гиперболический цилиндры.
108. Поверхности вращения. Конические поверхности.
109. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.
110. Эллипсоид.
111. Однополостный гиперболоид.
112. Двухполостный гиперболоид.
113. Эллиптический параболоид.
114. Гиперболический параболоид.
115. Конус второго порядка.

Задачи к экзамену (первый семестр)

1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}$$

2. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases}$$

3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$$

4. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от оси Oy и точки $F(4,0)$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3)$:

а) параллельно оси Ox ;

б) параллельно оси Oy ;

в) и составляющей с осью угол 45° .

6. Составить уравнения прямых, проходящих через точки: $A(3,1)$ и $B(5,4)$.

7. Стороны AB , BC и AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.

8. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2x - 3y + 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ параллельно и перпендикулярно прямой $y = x + 1$.

9. Найти длину и уравнение высоты BD в треугольнике с вершинами $A(-3,0)$, $B(2,5)$, $C(3,2)$.

10. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 3 кв. ед.

11. Дан треугольник с вершинами $A(-2,0)$, $B(2,4)$ и $C(4,0)$. Найти уравнения сторон треугольника, медианы AE , высоты AD и длину медианы AE .

12. В треугольнике ABC даны уравнения: стороны AB $3x + 2y - 12 = 0$, высоты BM $x + 2y - 4 = 0$, высоты AM $4x + y - 6 = 0$, где M – точка пересечения высот. Найти уравнения сторон AC , BC и высоты CM .

13. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y = x - 2$ и $x - 5y + 6 = 0$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Найти уравнения двух сторон параллелограмма и его диагоналей.

14. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 24 = 0$ и $3x + 4y + 6 = 0$.

15. Даны уравнения сторон треугольника $3x - 4y + 24 = 0$ (AB), $4x + 3y + 32 = 0$ (BC), $2x - y - 4 = 0$ (AC). Составить уравнения высоты и медианы, проведенных из вершины B , и найти их длины.

16. Найти плоскость, параллельную двум заданным параллельным плоскостям $2x + 3y - z - 1 = 0$ и $4x + 6y - 2z + 3 = 0$ и делящую расстояние между ними в отношении $2:3$.

17. Написать уравнение плоскости:

а) параллельной плоскости xOy и проходящей через точку $N(3; -5; 4)$;

б) проходящей через ось Oz и через точку $P(2; -3; 2)$;

в) параллельной оси Oy и проходящей через точки $Q(1; 3; 4)$ и $R(2; 5; -6)$.

Вопросы к экзамену (второй семестр)

1. Множества. Понятие функции. Способы задания функций.
2. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Характеристика поведения функций.
3. Предел переменной величины. Свойства пределов.
4. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Их свойства. Связь переменной, предела и бесконечно малой.
5. Предел функции. Основные теоремы о пределах.
6. Односторонние пределы. Математические неопределенности.
7. Замечательные пределы.
8. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.
9. Арифметические действия над непрерывными функциями.
10. Непрерывность сложной функции.
11. Непрерывность обратной функции.
12. Свойства функций, непрерывных на отрезке (теоремы Коши и Вейерштрасса).
13. Производная функции, ее геометрический и механический смысл.
14. Уравнения касательной и нормали.
15. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью.
16. Правила дифференцирования функций.
17. Производная обратной функции.
18. Производная сложной функции.
19. Вычисление производных основных элементарных функций. Таблица производных.
20. Дифференцирование неявно заданных функций.
21. Дифференцирование параметрически заданных функций.
22. Производные высших порядков.
23. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала.
24. Основные свойства дифференциалов.
25. Инвариантность формы дифференциала первого порядка.

26. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
27. Дифференциалы высших порядков.
28. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши).
29. Правила Лопиталя.
30. Применение производных к исследованию поведения функций.
31. Условия постоянства, возрастания и убывания функций на промежутке.
32. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
33. Выпуклость - вогнутость, точки перегиба графика функции. Достаточные условия выпуклости - вогнутости.
34. Условия существования точки перегиба графика функции.
35. Общий план исследования функций и построения графиков.
36. Первообразная.
37. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Простейшие методы интегрирования. Метод подстановки.
38. Интегрирование по частям.
39. Интегрирование рациональных дробей
40. Интегрирование тригонометрических дифференциалов, универсальная тригонометрическая подстановка.
41. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.
42. Определенный интеграл Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.
43. Вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.
44. Приближенное вычисление определенных интегралов.
45. Несобственные интегралы с бесконечными пределами (1-го рода), их основные свойства.
46. Несобственные интегралы от неограниченных функций (2-го рода), их основные свойства.
47. Приложения определенного интеграла к задачам геометрии, механики, физики.
48. Понятие комплексного числа. Геометрическое изображение комплексных чисел.
49. Действия над комплексными числами.
50. Комплексные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.
51. Функции нескольких переменных. Область определения. Геометрическое изображение функции двух переменных.
52. Предел, непрерывность функции нескольких переменных.
53. Частные производные функции нескольких переменных, их геометрический смысл.
54. Полный дифференциал.
55. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
56. Дифференцирование функций, заданных неявно.
57. Дифференцирование сложной функции.
58. Экстремумы функции двух переменных, необходимые и достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум.

59. Наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области.
60. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные понятия теории дифференциальных уравнений.
61. Задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.
62. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
63. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
64. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
65. Дифференциальные уравнения Бернулли.
66. Дифференциальные уравнения первого порядка в полных дифференциалах.
67. Дифференциальные уравнения высших порядков, понятия решения общего и частного. Задача Коши, геометрический смысл.
68. Уравнения, допускающие понижение порядка.
69. Линейно-зависимые и линейно-независимые функции.
70. Линейные однородные дифференциальные уравнения n -го порядка. Структура общего решения.
71. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
72. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения.
73. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).
74. Метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений со специальной правой частью.
75. Системы дифференциальных уравнений. Общие понятия. Методы решения.

Задачи к экзамену (второй семестр)

1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x - 1}{3x^3 + x^2};$	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 + x});$
в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{2x};$	г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{x^2 + 5x - 6};$
д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x \sin x};$	е) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{2-x} \right)^{\frac{1}{x}}.$

2. Указать характер точек разрыва функции

1) $y = e^{\frac{1}{x-2}}$

2) $y = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & \text{если } 0 < x < 2, \\ x-3, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$

3. Найти производные функций:

а) $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3,$

б) $y = \sin x \cdot \operatorname{arctg} x,$

в) $y = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}},$

г) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + 1}},$

д) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x,$

е) $y = (1 + \ln \sin x)^2.$

4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 - x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

5. Найти производные функций, заданных неявно:

а) $y^2 + 2x^2 y - x^2 = 0.$

б) $\cos y = 4y^2 + e^x.$

6. Найти производные функций, применяя логарифмическое дифференцирование:

а) $y = (\operatorname{arcctg} 4x)_{x^2}^{\frac{1}{x^2}}$

б) $y = \sqrt[4]{\frac{(6x-3)x^3}{(1-5x^2)^2}}$

7. Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ на интервале $[0, 5]$.

9. Вычислить интегралы:

1) $\int \left(5x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx;$

2) $\int \frac{x^2}{(1+3x^3)^2} dx;$

3) $\int x^2 \ln x dx;$

4) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx;$

5) $\int \frac{x^4+2}{x^3+3x} dx;$

6) $\int \frac{dx}{1+3\cos x}.$

10. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln^3 x};$

б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой: $y = \frac{x^2}{2} - x + 1$ и

$$y = -\frac{x^2}{2} + 3x + 6.$$

12. Найти полные дифференциалы указанных функций:

а) $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$; б) $z = xy^4 - 3x^2y + 1$.

13. Найти вторые частные производные указанных функций:

а) $z = e^{x^2 - y^2}$ б) $z = \operatorname{ctg}(x + y)$

14. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$;

б) $xy' - y = x^2$;

в) $2xyy' = (y')^2 - 1$;

г) $xy' + y = 3$. г) $xy' + y = 3$.

15. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = -4x - 4y \end{cases}$$

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству промежуточный контроль (экзамен)

Шкала оценивания	Характеристика знания предмета и ответов
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объеме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетвори- тельно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно четкие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетвори- тельно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы.

Экспертное заключение

Представленный фонд оценочных средств (далее – ФОС) по дисциплине «Высшая математика» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые формы и средства текущего и промежуточного контроля адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 38.03.02 Менеджмент.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины представлены в полном объеме.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанный и представленный для экспертизы фонд оценочных средств рекомендуется к использованию в процессе подготовки бакалавров по указанному направлению подготовки.

Председатель учебно-методической
комиссии Антрацитовского института
геосистем и технологий



И.В. Савченко

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)